



**Степанов Вадим Григорьевич**  
**Степанова Татьяна Викторовна**

## **Основы бизнес-анализа на компьютере**

## **Степанов Вадим Григорьевич**

кандидат экономических наук, доцент

Директор по R&D, руководитель проектов **INFORT Group**

Член общественно-экспертного совета по малому и среднему

предпринимательству при главе Администрации г. Тула

Эксперт Единого центра предпринимательства Санкт-Петербурга

[svg@infort-group.ru](mailto:svg@infort-group.ru)

## **Степанова Татьяна Викторовна**

Руководитель **INFORT Group**

Индивидуальный предприниматель

Консультант по технологиям бизнес-анализа

и CRM-системам управления сложными продажами.

Организатор, автор и ведущий бизнес-курсов и семинаров для СМСП с 2009 г.

Эксперт Единого центра предпринимательства Санкт-Петербурга

[stv@infort-group.ru](mailto:stv@infort-group.ru)

## Содержание

<b>Введение .....</b>	<b>5</b>
<b>Глава I. Технологии бизнес-анализа .....</b>	<b>21</b>
<b>§1. Методы линейной алгебры.....</b>	<b>21</b>
Матричная алгебра .....	21
Задачи матричной алгебры.....	25
Методы решения систем линейных алгебраических уравнений.....	44
<b>§2. Аппроксимация функций, оценка связей и прогнозирование.....</b>	<b>63</b>
Задача аппроксимации таблично заданной функции .....	63
Интерполяция .....	63
<i>Оценка надежности торгового автомата .....</i>	<i>67</i>
Аналитическое выравнивание табличных данных .....	76
Корреляционный анализ.....	80
<i>Оценка влияния доходов потребителей на объем покупок.....</i>	<i>87</i>
<i>Оценка влияния фактора территории на объем продаж.....</i>	<i>88</i>
<i>Оценка влияния возраста покупателей на частоту покупок .....</i>	<i>89</i>
Анализ рядов динамики и прогнозирование .....	90
<i>Оценка выполнения обязательств по поставкам товара .....</i>	<i>90</i>
<i>Оценка влияния факторов на динамику выручки.....</i>	<i>93</i>
<i>Оценка динамики и прогнозирование объемов продаж .....</i>	<i>97</i>
<i>Корреляционно-регрессионный анализ динамики объемов продаж .....</i>	<i>115</i>
<b>§3. Исследование функций .....</b>	<b>120</b>
Задача нахождения корня функции.....	120
Численные методы решения уравнений .....	120
<i>Задача нахождения корня функции численными методами .....</i>	<i>130</i>
Задача оптимизации .....	135
Численные методы одномерной оптимизации.....	137
<i>Оптимальное управление закупками товара .....</i>	<i>140</i>
<i>Приближенное решение задачи управления закупками.....</i>	<i>143</i>
Многомерная оптимизация. Метод множителей Лагранжа .....	145
<i>Оптимальное управление закупками ассортимента товаров.....</i>	<i>146</i>
<i>Оптимальная закупка производственных ресурсов .....</i>	<i>148</i>
Методы приведения многокритериальной задачи к однокритериальной задаче оптимизации.....	151
<i>Оптимальное планирование продаж .....</i>	<i>153</i>

<i>Оптимальное ценообразование в условиях конкуренции</i> .....	154
<i>«Задача о ресторане»: оптимальное планирование численности персонала</i> .....	155
<i>Выбор оптимального местоположения склада</i> .....	157
Задачи математического программирования .....	159
<i>«Задача о рюкзаке»: оптимальное управление поставками</i> .....	169
<i>Транспортная задача</i> .....	170
<i>Задача о назначениях</i> .....	172
Критерии теории игр с «природой» .....	174
<i>Выбор оптимального плана продаж</i> .....	177
<i>Выбор оптимального ассортиментного плана</i> .....	177
<i>Выбор оптимальной стратегии корпоративных продаж</i> .....	177
<i>Выбор оптимального проекта гостиницы</i> .....	178
<i>Выбор оптимального объема закупки товара</i> .....	178
<i>Выбор оптимального объема обслуживания покупателей</i> .....	179
<b>Глава II. Технологии работы с базами данных</b> .....	<b>181</b>
<b>§4. Подготовка данных</b> .....	<b>183</b>
<i>Создание базы данных</i> .....	183
<i>Заполнение базы данных</i> .....	185
<i>Создание пользовательских имен</i> .....	189
<b>§5. Обработка данных</b> .....	<b>193</b>
<i>Выборка значений из базы данных</i> .....	193
<i>Поиск значений в базе данных</i> .....	193
<i>Сортировка записей базы данных</i> .....	197
<i>Фильтрация записей в базе данных</i> .....	199
<i>Промежуточные итоги</i> .....	207
<b>§6. Оперативная аналитическая обработка данных</b> .....	<b>211</b>
<i>Сводные таблицы и диаграммы</i> .....	211
<b>§7. Компьютерный практикум по базам данных</b> .....	<b>228</b>
<i>База данных о странах мира</i> .....	228
<i>Анализ продаж компьютерного магазина</i> .....	245
<i>Анализ продаж в торговой сети</i> .....	261
<i>Структурный ABC-анализ продаж</i> .....	267
<b>Список литературы</b> .....	<b>276</b>

## Введение

Управление предприятием в современных условиях рынка требует от его руководителя, управленцев и специалистов принятия *рациональных*, то есть разумных (от лат. *ratio* – разум) решений по различным вопросам ведения бизнеса.

### Принятие решений

Управление бизнесом связано с принятием решений. *Принятие решения* – это процесс, связывающий функции управления: планирование, организацию, мотивацию и контроль. Занимаемся ли мы постановкой целей и задач или создаем организационную структуру, стимулируем работников для достижения поставленных целей или контролируем их работу, нам приходится принимать соответствующие решения.

Когда мы принимаем решение, то выбираем по нашему мнению наилучшую в сложившихся условиях, то есть *оптимальную*, альтернативу. Очевидно, что при этом *лицу, принимающему решение (ЛПР)* требуются соответствующие знания об объекте управления – процессе хозяйственной деятельности предприятия в целом или каком-либо локальном бизнес-процессе, на который направлены его управляющие воздействия. Полезные для принятия решения сведения, расширяющие знания ЛПР об объекте, называются *информацией*. Следовательно, процесс принятия решений, как и процесс управления в целом является, в первую очередь, процессом информационным.

Степень оптимальности принимаемого решения будет напрямую зависеть от объема имеющейся в распоряжении ЛПР информации об объекте. Объем информации определяет степень *неопределенности* и соответствующий уровень *риска* для ЛПР при принятии им решения. *Риск* – это вероятность принятия решения, которое может привести к негативным для объекта управления последствиям.

Существенно ограниченный объем информации или ее отсутствие приводит к необходимости принимать *интуитивные* решения или, в лучшем случае, опираться на прошлый *опыт* и суждения ЛПР. Такие способы принятия решений по сложным вопросам хозяйственной деятельности предприятия связаны с большими рисками и, как правило, не являются оптимальными. Поэтому здесь для обеспечения принятия оптимальных решений требуется использовать *рациональный подход*, который предполагает объективную оценку ситуации не на основе интуиции и суждений ЛПР, а на основе информации, полученной в результате применения *количественных* и *качественных* методов анализа. Так как большинство показателей хозяйственной деятельности предприятия выражаются количественно, поэтому *количе-*

ственные методы анализа имеют ведущее значение для принятия разумных решений и, следовательно, для управления бизнесом в целом.



Очевидно, что не всякая информация позволяет принимать решения. Для того, чтобы понять, какая именно информация необходима лицу, принимающему решения, рассмотрим **информационную Δ-модель управления INFORT Group, © INFORT Group, 1990-2024** (см. Рис.1).

На рисунке 1 показано, что с точки зрения реализации функций планирования и контроля, можно выделить три типа бизнес-информации: *плановую, учетную и аналитическую*.

Стрелками на треугольниках показана последовательность формирования и взаимного влияния различных типов и видов бизнес-информации.

## Планирование

*Планирование* – управленческая функция, включающая определение целей, задач и распределение необходимых для достижения целей ресурсов.

*Цель* – это идеальное представление результата деятельности объекта управления, а также способов и средств его достижения. При этом результатом будет являться некоторое состояние объекта управления.

- Цели должны быть *конкретными и измеримыми*, то есть необходимо точно определить, каким должен быть результат. Это создает базу, необходимую для оценки фактического состояния объекта управления.
- Цели должны быть *ориентированными во времени*, то есть требуется точно определить, когда должен быть достигнут результат. В этом аспекте различают *долгосрочные (стратегические)*, *среднесрочные (тактические)* и *краткосрочные (оперативные)* цели.
- Цели должны быть *достижимыми*. Достижение цели должно быть обеспечено необходимыми ресурсами предприятия и условиями внешней среды

Следовательно, каждая цель требует своего явного задания с указанием условий ее достижения и необходимых ресурсов. То есть требуется постановка соответствующей *задачи*.

Для этого необходимо определить набор релевантных цели *количественных показателей*, характеризующих состояние объекта управления. При этом одна часть показателей будет характеризовать промежуточные и конечные *результаты* достижения цели, а другая часть – *факторы*, влияющие на достижение цели. Например, показатели объема прибыли и рентабельности продаж могут характеризовать результат хозяйственной деятельности предприятия за период, а показатели себестоимости продаж, уровня товарных запасов, цен и спроса на товары и услуги предприятия – факторы, влияющие на результат. Очевидно, что при постановке задачи необходимо учитывать существующие между показателями *связи*.

Тогда, задача – это явное задание цели и условий ее достижения посредством определения *целевых значений* показателей, характеризующих желаемое состояние объекта управления. Целевые значения показателей образуют плановую информацию и являются теми *стандартами*, с которыми будут сравниваться фактически достигнутые результаты.

Формой представления плановой информации является *план* – описание порядка действий для достижения цели (решения задачи). В зависимости от *горизонта планирования* различают *стратегические, тактические и оперативные* планы. План

распределения ресурсов, необходимых для достижения целей, выраженный в стоимостной форме, называется *бюджетом*.

### Контроль

*Контроль* – это процесс наблюдения за деятельностью объекта управления для обеспечения достижения поставленных целей.

В процессе наблюдения за объектом осуществляется *оценка* текущего состояния объекта, *прогноз* будущего его состояния, а также *поиск оптимального состояния* объекта управления. Оценка состояния объекта осуществляется посредством сравнения фактических значений показателей, характеризующих состояние объекта управления, со стандартами.

По отношению к процессу решения конкретной задачи различают следующие *типы контроля*:

- *предварительный*, осуществляемый на этапе постановки задачи для оценки ресурсов, необходимых для достижения цели;
- *текущий*, осуществляемый на этапе реализации задачи, который направлен на оценку текущих отклонений фактических результатов от *стандартов*. Результатом текущего контроля является принятие решения: либо ничего не предпринимать, либо устранить имеющиеся отклонения от стандартов, либо пересмотреть сами стандарты;
- *заключительный*, направленный на итоговую оценку полученных результатов.

### Учёт и анализ

Функция контроля предполагает реализацию на предприятии двух комплексных информационных задач: задачу учёта и задачу анализа деятельности объекта управления, в результате решения которых формируется, соответственно, учетная и аналитическая информация.

*Учетная* (бухгалтерская, оперативная и статистическая) информация отражает фактическое состояние объекта управления в различных аспектах.

*Общая задача учета* включает задачу *бухгалтерского и/или налогового учета*, которая обеспечивает получение бухгалтерской информации, и задачу *управленческого (оперативного и статистического) учета*, обеспечивающую получение оперативной и статистической информации об объекте.

Данные учета являются основой для формирования аналитической информации – *оценок, прогнозов и оптимумов* состояния объекта управления. Задачи получения аналитической информации называются *задачами бизнес-анализа*.

*Аналитическая информация является основой для принятия решений*, в том числе – для определения целей и задач деятельности объекта в будущем, то есть для формирования плановой информации.

### **Технологии и системы бизнес-анализа**

Совокупность знаний, которые позволяют получить *информационный продукт* посредством выполнения процедур преобразования *информационного сырья*, называется *информационной технологией* (ИТ, *Technology* от *Techne* – искусство и *Logos* – учение).

Выделяют следующие *процедуры преобразования информации*:

- 1) получение исходных данных – первичной информации (информационного сырья) посредством наблюдений, измерений, расчетов;
- 2) сбор и регистрация первичной информации на носителях;
- 3) передача информации;
- 4) хранение информации;
- 5) обработка информации;
- 6) получение и контроль результатов – вторичной информации (информационного продукта).

С учетом вышесказанного, можно говорить о технологиях учета, бизнес-анализа и планирования.

*Технологии учета* позволяют получить информационный продукт – бухгалтерскую, оперативную и статистическую информацию, в результате преобразования информационного сырья, в качестве которого выступают данные регистрации различных фактов хозяйственной деятельности предприятия.

*Технологии бизнес-анализа* позволяют получить аналитическую информацию – оценки, прогнозы и оптимумы состояния объекта управления в результате преобразования данных учета. Плановая информация, как информационный продукт, получается в результате применения *технологий планирования* к данным анализа.

Как правило, технологии бизнес-анализа и планирования объединяются под общим названием *информационные технологии управления* (ИТУ).

Информационная технология и средства ее реализации образуют *информационную систему* (ИС).

Информационная технология управления локальным бизнес-процессом и средства ее реализации образуют *систему поддержки принятия управленческих решений* или *систему бизнес-анализа* (*Business Intelligence, BI*). Например, можно говорить о си-

стемах бизнес-анализа процесса продаж, закупок, формирования ассортимента, ценообразования, рекламной деятельности и т. д.

Если решение информационных задач осуществляется с применением средств компьютерной техники, то информационная система называется *автоматизированной (АИС)*. Автоматизированная система комплексного анализа взаимосвязанных бизнес-процессов называется *автоматизированной системой управления (АСУ)*.

Примером автоматизированной системы управления является **INFORT.Управление**, © **INFORT Group, 1990-2024**, которая обеспечивает поддержку принятия управленческих решений в сфере маркетинга, продаж и закупок (см. [11]).

### Виды обеспечения систем бизнес-анализа

Организационно-экономические, информационные, математические, технические и программные средства реализации информационной технологии образуют соответствующие *виды обеспечения* информационной системы.

В настоящей книге представлены экономико-математические и статистические модели и методы, лежащие в основе *математического обеспечения* компьютерных систем бизнес-анализа, а также методика выполнения компьютерных расчетов с использованием популярного офисного приложения – *табличного процессора Microsoft Excel*.

На сегодняшний день *Microsoft Excel* является наиболее мощным по своим возможностям и при этом вполне доступным инструментальным средством для решения большинства аналитических задач. Кроме того, при необходимости, стандартные аналитические возможности табличного процессора можно существенно расширить посредством разработки программного обеспечения на встроенном в офисный пакет *Microsoft Office* языке программирования *Visual Basic for Applications (VBA)*. Подготовка исходных данных для анализа также может осуществляться с помощью встроенной в табличный процессор *системы управления базами данных (СУБД)*. Поэтому табличный процессор *Microsoft Excel* составляет основу *прикладного программного обеспечения* большинства систем бизнес-анализа.

В случае, если в качестве исходных данных для анализа используются значительные объемы данных учета, то для их предварительной обработки можно воспользоваться СУБД *Microsoft Access* или более мощной системой управления базами данных *Microsoft SQL Server*.

Для решения аналитических задач, как правило, используются стандартные программные средства, поэтому системы бизнес-анализа обычно не предъявляют каких-либо повышенных требований в плане своего *технического (компьютерного) обес-*

печения.

Для *информационного обеспечения* решения задач бизнес-анализа данные управленческого учета имеют преимущественное значение по сравнению с данными бухгалтерского учета, так как носят оперативный характер и, таким образом, обеспечивают своевременность получения аналитической информации для принятия управленческих решений. В то же время процедуры управленческого учета в отличие от бухгалтерского учета никак не регламентированы и технологии управленческого учета разрабатываются предприятиями самостоятельно, в зависимости от специфики их хозяйственной деятельности и соответствующей профессиональной подготовки персонала.

В плане *организационно-экономического обеспечения* систем бизнес-анализа существенное значение имеет профессиональная подготовка пользователей аналитической информации – руководителей, управленцев и специалистов предприятия. При этом большую роль играет, как уровень общей информационной культуры, так и наличие знаний в области бизнес-анализа, которые являются ключевыми компетенциями ЛПР. Одна и та же система бизнес-анализа для подготовленного лица, принимающего решение, может стать «персональным консультантом», а для неподготовленного – «генератором случайных чисел».

### **Математическое обеспечение систем бизнес-анализа**

*Математическое обеспечение* информационной системы образует совокупность математических моделей, методов и алгоритмов, которые используются для решения информационных задач.

Технологии бизнес-анализа основаны на моделировании объекта управления. *Моделирование* – это процесс изучения объекта, посредством построения и исследования его модели. *Модель* – это образ, некоторое представление реального объекта, которое в каком-то смысле отражает его основные свойства и особенности функционирования. При этом различают *предметные (физические)* и *абстрактные (идеальные)* модели.

*Предметная* модель представляет собой материальный образ объекта (например, масштабная копия объекта или тренажер). *Абстрактная* модель основана на идеальном представлении об объекте и представляет собой формализованное описание объекта с использованием определенной системы символов, графических изображений и правил (например, схема организационной структуры предприятия, химическая или математическая формула процесса).

Одной из разновидностей абстрактных моделей являются математические модели.

*Математическая модель* – это идеальный образ объекта управления, представленный в виде совокупности формул связи между количественными показателями, характеризующими состояние объекта.

Так как невозможно построить физическую модель экономического объекта, поэтому для анализа объектов в экономике применяется моделирование на основе абстрактных, в частности, математических моделей.

Рассмотрим основные *этапы математического моделирования*.

## 1. *Постановка задачи бизнес-анализа.*

1.1. *Исследования объекта управления и определение цели бизнес-анализа.* Деятельность объекта управления может рассматриваться в различных аспектах. Например, процесс продаж может рассматриваться как процесс удовлетворения спроса потребителей или как процесс генерирования издержек, или как процесс получения прибыли предприятием. Следовательно, чтобы управлять данным бизнес-процессом в каждом из указанных аспектов, требуется принимать различные решения и, соответственно, необходима различная аналитическая информация. Поэтому постановка задачи бизнес-анализа начинается с исследования объекта управления и формулирования цели проведения анализа его деятельности.

1.2. *Определение набора аналитических и учетных показателей.* Как уже было сказано выше, состояние объекта управления определяется набором взаимосвязанных количественных показателей. Поэтому следующим шагом на этапе постановки задачи является выбор оптимального перечня *аналитических показателей* в соответствии с поставленной целью бизнес-анализа.

При этом необходимо учитывать, что использование в модели большого количества показателей и связей может слишком усложнить, как саму модель, так и применяемые для ее решения методы. В то же время необоснованное упрощение (агрегирование) модели может сделать ее слишком «идеальным образом», неадекватным объекту и, поэтому, получаемые в дальнейшем результаты решения задачи окажутся недостоверными.

Определение набора аналитических показателей приводит к пониманию необходимого для их получения набора *учетных показателей*. На данном этапе необходимо оценить возможность получения достоверных исходных учетных данных для анализа. Часто именно недостатки в реализации на предприятии систем бухгалтерского и управленческого учета, существенно ограничивают возможности применения количественных методов анализа для поддержки приня-

тия управленческих решений и, следовательно, использования рационального подхода к управлению бизнесом.

1.3. *Построение математической модели.* Далее, осуществляется переход к определению и построению формул связи между выбранными учетными и аналитическими показателями. Для этого все показатели, характеризующие состояние объекта, необходимо разделить на две категории: *факторы* и *результаты* достижения цели. Например, показатель объема валовой прибыли  $R$ , полученной предприятием от продажи товара за период, может характеризовать результат хозяйственной деятельности предприятия, а цена закупки товара  $C$ , цена продажи товара  $P$  и физический объем его продаж  $Q$  могут выступать в качестве показателей, характеризующих воздействие факторов на результат.

При этом следует учитывать, что часть факторов находится в распоряжении ЛПР, то есть являются *управляемыми*, а другая часть факторов являются *неуправляемыми*. Например, в общем случае, цена продажи товара  $P$  является управляемым фактором, а цена закупки товара  $C$  – неуправляемым фактором продаж.

Очевидно, что между факторами и результатами имеют место связи, которые носят как определенный *функциональный*, так и вероятностный *статистический* характер. *Функциональную связь* можно точно выразить в виде формулы, как правило, с использованием стандартного математического аппарата. Например,  $R = (P - C) \times Q$ .

Форму *статистической связи* вначале нужно предположить, а затем приближенно определить соответствующую формулу. Например, в предположении о наличии обратно пропорциональной связи между показателями физического объема продаж товара  $Q$  и ценой продажи товара  $P$ , можно приближенно определить следующую форму связи:  $Q = \frac{a_1}{P} + a_0$ , где  $a_0$  и  $a_1$  – некоторые константы.

Далее, используя метод наименьших квадратов, на основе фактических данных необходимо вычислить значения параметров  $a_0$  и  $a_1$ . При этом требуется количественно обосновать, как наличие связи, так и выбранную форму связи между показателями. Для этих целей используются соответствующие методы статистического анализа.

Математически воздействие факторов на результат представляется в виде *модели*:

$$y = f(x, a), \quad (1)$$

где

$f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  – функции модели, определяющие формулы связи между показателями состояния объекта управления;

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – независимые переменные модели (аргументы функций), характеризующие управляемые факторы;

$a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  – параметры модели (функций), характеризующие неуправляемые факторы. Параметры задаются в виде числовых констант;

$y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  – зависимые переменные модели (значения функций), характеризующие результаты.

« = » – знак связи показателей. Помимо знака равенства « = » в формулах связи могут использоваться знаки неравенства « < », « > », « ≤ », « ≥ », и знак стремления к целевому значению (экстремуму) функции « → ».

Формула (1) задает общий случай математической модели объекта управления.

Имеют место частные случаи математических моделей:

- Если в качестве одной из переменных модели используется фактор времени  $t$ , то модель называется *динамической*, иначе модель называется *статистической*.
- Если в качестве переменных модели используются случайные величины, то модель называется *вероятностной (стохастической)*, иначе модель называется *детерминированной (определенной)*.
- Если значения переменных модели являются дискретными числами, то модель называется *дискретной*, иначе модель называется *непрерывной*.
- Если все функции модели являются линейными, то модель называется *линейной*, иначе – *нелинейной*.
- Если в одной или нескольких формулах модели используется знак « → », то есть ищется экстремум (минимум или максимум) функции, то модель называется *моделью (задачей) оптимизации*. Соответствующие функции модели, для которых ищется экстремум, называются *целевыми* или *критериями оптимальности*. В зависимости от количества целевых функций модели, различают *однокритериальные* и *многокритериальные* задачи оптимизации. В зависимости от количества независимых переменных задачи оптимизации, различают модели *одномерной* и *многомерной* оптимизации. Если модель оптимизации включает только целевую функцию (целевые функции), то имеет место *задача безусловной оптимизации*, иначе, если кроме целевой функции

имеются функции-ограничения задачи, то задача называется *задачей условной оптимизации*.

## 2. Выбор метода решения задачи на основе модели.

*Решение задачи* на основе модели (1) заключается в нахождении таких допустимых значений переменных  $x$ , которые обеспечат целевые значения  $y$ . Для решения задачи используются аналитические и приближенные методы.

*Аналитические методы* позволяют получить решение задачи в виде одной или нескольких формул, связывающих независимые переменные  $x$  с параметрами модели  $a$ :  $x = x(a)$ .

В некоторых случаях решить задачу аналитически, то есть получить формулу  $x = x(a)$ , оказывается невозможно, и тогда используются приближенные методы решения. *Приближенные методы* позволяют получить решение  $x$  на основе значений параметров модели  $a$  в результате выполнения некоторого вычислительного алгоритма.

Как правило, выбор определенной модели для анализа объекта управления однозначно определяет и выбор соответствующих методов решения задачи. Для *оценки* состояния объекта управления используются методы сравнительного анализа, методы анализа динамики (горизонтальные методы) и методы анализа структуры (вертикальные методы), методы факторного анализа, методы экспертных оценок, методы финансового R-анализа, методы инвестиционного анализа и прочие. Для *прогноза* состояния объекта используются статистические методы анализа рядов динамики, корреляционно-регрессионного анализа и прогнозирования. Нахождение *оптимальных* значений показателей состояния объекта осуществляется с использованием экономико-математических методов оптимизации, в частности, методов математического программирования, теории игр, управления товарными запасами, сетевого планирования и управления, теории массового обслуживания. Как правило, указанные разделы прикладной математики, связанные с оптимизацией процессов объединяются под общим названием *исследование операций*. *Исследование операций* (Operation Research, OR) – математическая дисциплина, занимающаяся вопросами применения количественных методов для анализа и обоснования целенаправленных действий (операций) в различных областях человеческой деятельности.

## 3. Компьютерная реализация решения задачи на основе модели.

Основным инструментом для решения задач бизнес-анализа является компьютер. Поэтому разработка программы для решения задачи бизнес-анализа является

естественным этапом процесса моделирования, и включает стандартные процедуры создания программного обеспечения:

3.1. *Постановка задачи автоматизации бизнес-анализа.* Постановка задачи, в общем случае, включает описание:

- характеристик объекта управления и целей автоматизации;
- входных и выходных данных – переменных и параметров модели;
- алгоритма решения задачи на основе выбранного метода;
- требований к инструментальному средству разработки программы;
- требований организационно-экономического и технического характера, предъявляемых к программному обеспечению.

На этапе постановки задачи автоматизации осуществляется выбор инструментального средства программирования. Как уже было сказано выше, наиболее подходящим средством программирования задач бизнес-анализа является табличный процессор *Microsoft Excel*. Для расширения стандартных аналитических возможностей табличного процессора можно воспользоваться встроенным языком программирования *VBA*, а для предварительной обработки используемых в анализе учетных данных, целесообразно воспользоваться той или иной СУБД.

3.2. *Программирование задачи.* Процесс программирования задачи включает процедуры проектирования, кодирования,  $\alpha$ -тестирования и отладки программы;

3.3. *Внедрение и сопровождение программы.* На данном этапе осуществляется  $\beta$ -тестирование программы на реальных данных, внесение необходимых изменений в программу, обучение и консультирование пользователей по вопросам эксплуатации программы.

4. *Решение задачи на основе модели.*

Завершающим этапом моделирования является решения задачи: выполнение компьютерных расчетов для нахождения значений  $x$ . Полученные результаты используются для принятия оптимальных управленческих решений на рациональной основе.

### Структура и аудитория книги

Как было указано выше, в математической интерпретации состояние объекта управления определяется набором взаимосвязанных количественных показателей. Формулы связи показателей называются *функциями*, а множество взаимосвязанных функций, выбранных для анализа объекта управления, образуют *математическую модель* объекта управления. Таким образом, в целом, *задача бизнес-анализа заключается в построении и исследовании функций*. Кроме того, если мы говорим именно о технологиях бизнес-анализа, то необходимо рассматривать не только непосредственно методы анализа, но и методы подготовки исходных данных для анализа, а также современные технологии их аналитической обработки. Именно с учетом вышесказанного и представлен материал данной книги.

*Первая глава книги* посвящена технологиям бизнес-анализа. Глава начинается с рассмотрения методов линейной алгебры, так как элементы данного раздела высшей математики широко используются для решения самых различных задач бизнес-анализа. В §1 представлены методы матричных операций, вычисления определителей и решения систем линейных уравнений.

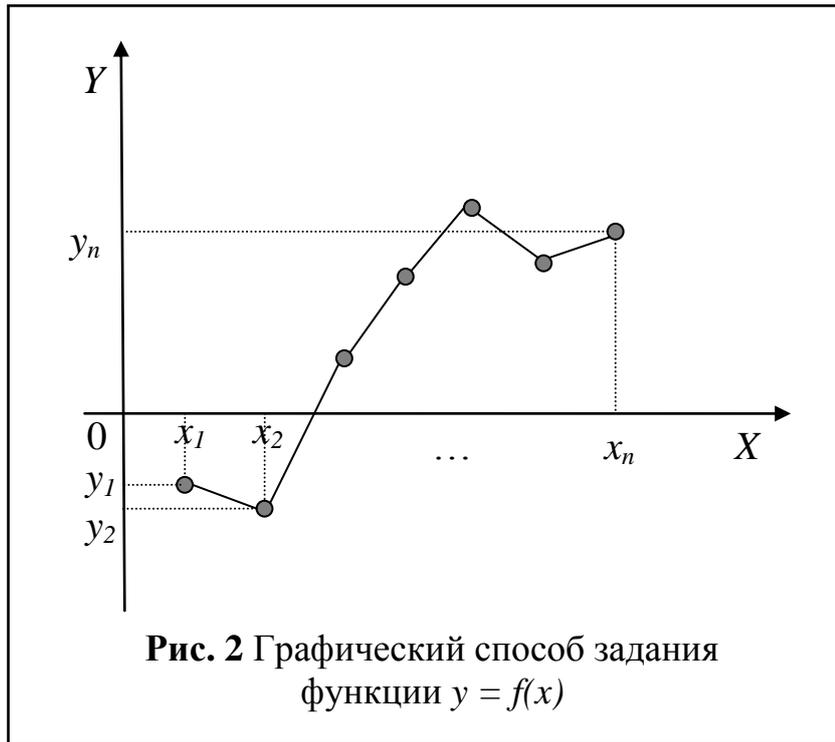
Для того, чтобы понять практическую значимость представленных в первой главе методов, рассмотрим основные этапы бизнес-анализа с точки зрения способов задания и исследования функций модели объекта управления.

Как правило, исходные учетные данные для анализа представлены в дискретном виде – в виде наборов чисел, а существующие между показателями связи представляются в виде числовых таблиц. То есть имеет место *табличный способ* задания функций модели. Зависимость  $y = f(x)$  результата  $y$  от фактора  $x$  представляется таблицей, включающей  $n$  пар чисел  $(x, y)$ :

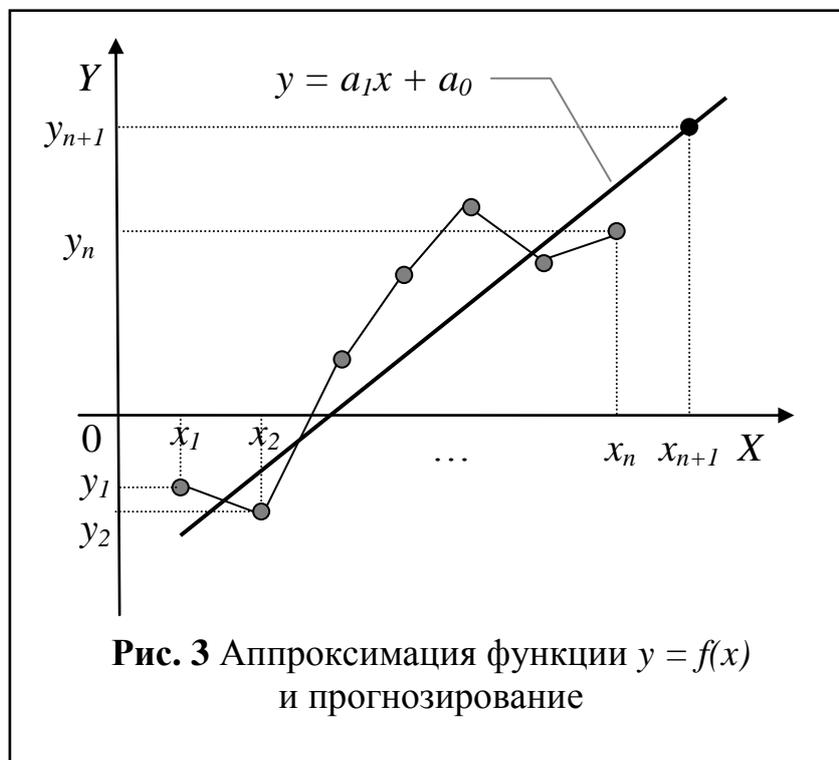
$x$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_n$

Для наглядного представления табличных данных можно воспользоваться *графическим способом* задания функций модели (см. Рис.2). На основе графика осуществляется предварительное исследование функции.

Для дальнейшего исследования необходимо перейти от табличного к *аналитическому способу* задания функции, то есть требуется задать зависимость  $y = f(x)$  в виде формулы (см. Рис.3, линейная функция  $y = a_1 \cdot x + a_0$ ). Выбор аналитической формы представления функции осуществляется на основе изучения ее графика, а для вычисления параметров функции используются *методы аппроксимации* функций.



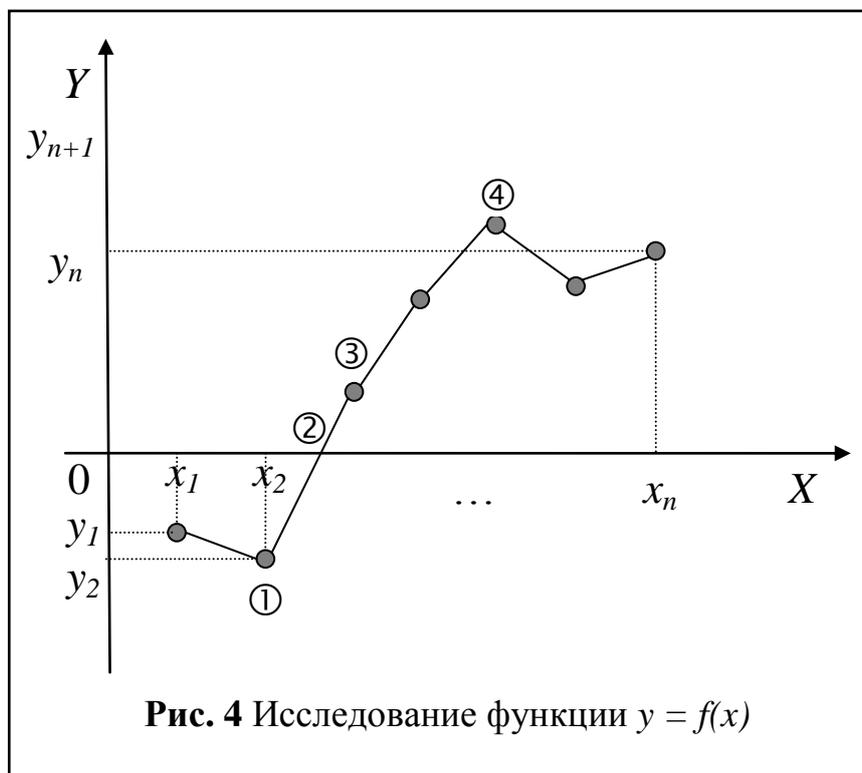
Аналитическое представление функции позволяет осуществлять *прогнозирование* значений функции (см. Рис.3, прогноз  $(x_{n+1}, y_{n+1})$ ) и, следовательно, прогнозировать будущие состояния объекта управления.



При выполнении аппроксимации функции и прогнозирования необходимо учитывать, что исходные значения изучаемых показателей носят, как правило, случайный характер. Выбор формы связи между случайными величинами и оценка степени свя-

зи между ними осуществляется с применением *методов корреляционно-регрессионного анализа*. Методы аппроксимации функции, корреляционно - регрессионного анализа и прогнозирования рассмотрены в §2.

Особое значение в ходе исследования функции имеет нахождение корней (нулей) функции, точек экстремума и перегиба. Данные точки функции характеризуют происходящие качественные изменения состояния объекта управления, такие, как переход от убытков к прибыли, ускорение и замедление роста объемов продаж или их сезонные пики. На рисунке 4 показаны: ① точка минимума; ② корень (нуль) функции; ③ точка перегиба; ④ точка максимума.



Для вычисления корней и точек экстремума функции используются, как точные аналитические методы, так и приближенные численные методы расчетов. Как правило, на практике аналитические методы применяются для решения ограниченного круга задач бизнес-анализа. Численные методы широко применяются на практике и реализованы в математических и статистических пакетах прикладных программ и в различных инструментальных средствах бизнес-анализа. В частности, численные методы реализованы в модулях *Подбор параметра* и *Поиск решения* табличного процессора *Microsoft Excel*.

В §3 представлены численные методы решения уравнений и оптимизации, задачи одномерной и многомерной оптимизации и аналитические методы их решения, за-

дачи математического программирования и методы их решения на компьютере, критерии и задачи теории игр с «природой».

*Вторая глава книги* посвящена технологиям подготовки и оперативной аналитической обработки баз данных с использованием приложения *Microsoft Excel*. В §4 представлены процедуры подготовки данных, а в §5 – процедуры выполнения основных операций над данными: сортировка, поиск и фильтрация данных, вычисление промежуточных итогов. Технология оперативной аналитической обработки данных (*On Line Analytical Processing, OLAP*) является мощным современным средством анализа данных в формате сводных таблиц и диаграмм. Табличный процессор *Microsoft Excel* включает соответствующие инструменты анализа, которые рассмотрены в §6. В §7 представлены задачи создания баз данных и их аналитической обработки на основе сводных таблиц и диаграмм.

Предлагаемый в книге материал не потребует для своего понимания глубоких знаний математики, статистики и компьютерных технологий. В то же время мы надеемся, что читатель готов к серьезной аналитической работе.

Книга предназначена для руководителей, управленцев и специалистов предприятий, а также научных работников, аспирантов и студентов экономических специальностей, изучающих вопросы практического применения количественных методов анализа в бизнесе.

Мы надеемся, что с помощью представленного теоретического и практического материала книги мы сможем донести до читателя те современные технологии получения аналитической информации, которые позволят ему всегда чувствовать уверенность при принятии решений и добиваться успехов в бизнесе.

## Глава I. Технологии бизнес-анализа

### §1. Методы линейной алгебры

#### Матричная алгебра

*Матрицей* размера  $m \times n$  называется прямоугольная таблица чисел, содержащая  $m$  строк и  $n$  столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются *элементами* матрицы.

*Обозначения:*

$A_{m \times n}$  – матрица  $A$ , состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов,  $a_{ij}$  – элемент матрицы, где  $i$  – номер строки ( $i=1, 2, \dots, m$ ),  $j$  – номер столбца ( $j=1, 2, \dots, n$ ):

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

*Квадратной матрицей* называется матрица, в которой количество строк совпадает с количеством столбцов.

*Главная диагональ матрицы* – элементы квадратной матрицы, у которых индекс строки совпадает с индексом столбца.

*Побочная диагональ матрицы* – элементы квадратной матрицы, у которых одинаковая сумма индексов.

*Диагональные элементы* – элементы главной диагонали квадратной матрицы.

*Диагональная матрица* – квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю, называется диагональной (не обязательно все диагональные элементы диагональной матрицы отличны от нуля. Среди них могут быть и равные нулю).

*Единичная матрица* – диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице:  $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$

*Верхняя треугольная матрица* – квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные ниже главной диагонали равны нулю ( $a_{ij} = 0$ , если  $i > j$ ).

*Нижняя треугольная матрица* – квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные выше главной диагонали равны нулю ( $a_{ij} = 0$ , если  $i < j$ ).

Над матрицами можно выполнять ряд *операций*: умножение матрицы на число, сложение матриц, вычитание матриц, умножение матриц, возведение в степень, транс-

понирование матрицы.

*Умножение матрицы на число.* Произведением матрицы  $A_{m \times n}$  на число  $\lambda$  называется матрица  $B_{m \times n} = \lambda \cdot A_{m \times n}$ , элементы которой вычисляются следующим образом:

$$b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}, \text{ где } i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n.$$

*Сложение матриц.* Суммой двух матриц  $A_{m \times n}$  и  $B_{m \times n}$  одинакового размера называется матрица  $C_{m \times n} = A_{m \times n} + B_{m \times n}$ , элементы которой вычисляются следующим образом:  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ , где  $i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$ .

*Вычитание матриц.* Разность двух матриц  $A_{m \times n}$  и  $B_{m \times n}$  одинакового размера определяется через операции сложения матриц и умножения матрицы на число  $A_{m \times n} - B_{m \times n} = A_{m \times n} + (-1) \cdot B_{m \times n}$ . Элементы результирующей матрицы вычисляются следующим способом:  $c_{ij} = a_{ij} + (-1) \cdot b_{ij}$ , где  $i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$ .

*Умножение матриц.* Умножение матрицы  $A_{m \times k}$  на матрицу  $B_{k \times n}$  можно выполнить только тогда, когда число столбцов первой матрицы  $A_{m \times k}$  равно числу строк второй матрицы  $B_{k \times n}$ :  $C_{m \times n} = A_{m \times k} \times B_{k \times n}$ .

В этом случае матрица  $A_{m \times k}$  называется *согласованной* с матрицей  $B_{k \times n}$ . Элемент матрицы  $c_{ij}$  равен сумме произведений элементов  $i$ -ой строки матрицы  $A_{m \times k}$  на соответствующие элементы  $j$ -го столбца матрицы  $B_{k \times n}$ :

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{s=1}^k a_{is} \cdot b_{sj}.$$

*Возведение в степень.* Целой положительной степенью  $A_{n \times n}^l$ , где  $l > 1$ , квадратной матрицы  $A_{n \times n}$  называется произведение  $l$  матриц, равных  $A_{n \times n}$ :

$$A_{n \times n}^l = \underbrace{A_{n \times n} \times A_{n \times n} \times A_{n \times n} \times \dots \times A_{n \times n}}_{l \text{ раз}}$$

*Транспонирование матрицы.* Транспонирование заключается в том, что первая строка массива становится первым столбцом нового массива, вторая строка массива становится вторым столбцом нового массива, и так далее. Следовательно, при транспонировании размерность массива меняется следующим образом:  $A_{m \times n} \rightarrow A_{n \times m}^T$

*Свойства операций над матрицами:*

1.  $A + B = B + A$
2.  $(A + B) + C = A + (B + C)$
3.  $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
4.  $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
5.  $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$

$$6. \lambda \cdot (A \times B) = (\lambda \cdot A) \times B = A \times (\lambda \cdot B)$$

$$7. A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

Определителем квадратной матрицы  $A$  называется определитель, элементами которого являются элементы матрицы  $A$ . Он обозначается символом  $|A|$ :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Неособенной матрицей называется квадратная матрица, определитель которой не равен нулю.

Особенной матрицей называется квадратная матрица, определитель которой равен нулю.

Определитель матрицы первого порядка:

$$\Delta = |a_{11}| = a_{11}.$$

Определитель матрицы второго порядка:

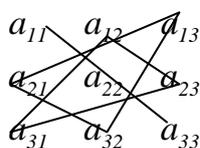
$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Определитель матрицы третьего порядка:

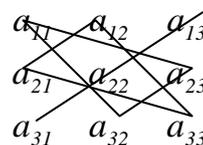
$$\begin{aligned} \Delta = |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - \\ &- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} \end{aligned}$$

Полученная алгебраическая сумма, состоит из 6 слагаемых, каждое из которых представляет произведение элементов матрицы, в которое входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знаки, с которыми члены определителя входят в формулу определяются по схеме, которая называется *правилом треугольника* или *правилом Сарруса*:

Со знаком +



Со знаком -



Минором  $M_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  называется определитель, который получается из определителя матрицы  $n$  на  $n$ , если в нём вычеркнуть элементы  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца и имеющий порядок на единицу меньше, чем определитель исходной матрицы. Например для  $n=4$  :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением  $A_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  исходного определителя называется минор  $M_{ij}$ , взятый со знаком «+», если  $i+j$  – число четное и со знаком «-», если  $i+j$  – число нечетное:  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ .

Определитель матрицы порядка более трех.

**Теорема Лапласа.** Определитель матрицы  $n$  на  $n$  равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$|A|_{n \times n} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}, \text{ где } i=1, 2, \dots, n.$$

Формула Лапласа позволяет понижать порядок заданного определителя и таким образом упрощает вычисления.

Обратной матрицей  $A^{-1}$  по отношению к квадратной матрице  $A$ , называется такая матрица, при умножении которой на исходную матрицу  $A$  как справа, так и слева получается единичная матрица:

$$A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу можно получить следующим образом:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

где  $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$  – определитель матрицы  $A$ ,

$A_{ij}$  – алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$  где  $i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,n..$

### Задачи матричной алгебры

**Задачи:** определение числа строк и столбцов в матрице, умножение матрицы на число, сложение матриц, вычитание матриц, извлечение элемента из матрицы по номеру строки и номеру столбца.

#### Вариант №1

Заданы матрицы  $A_{m \times n}$  и  $B_{m \times n}$  и число  $\lambda$ .

A=	6	5	7
	8	9	5
	5	2	4
	2	8	6
	9	4	1

B=	9	9	3
	5	5	4
	2	6	8
	3	5	1
	4	7	2

Получить следующие матрицы:

$$C = \lambda \cdot A \text{ при } \lambda=3$$

$$D = A + B$$

$$F = A - B$$

Извлечь из матрицы A элемент  $a_{32}$

#### Результаты вычислений:

Количество строк в матрице A: **5**

Количество столбцов в матрице A: **3**

$$C = \lambda \cdot A$$

18	15	21
24	27	15
15	6	12
6	24	18
27	12	3

$$D = A + B$$

15	14	10
13	14	9
7	8	12
5	13	7
13	11	3

$$F = A - B$$

-3	-4	4
3	4	1
3	-4	-4
-1	3	5
5	-3	-1

$a_{32} =$	2
------------	---

#### Вариант №2

Заданы матрицы  $A_{m \times n}$  и  $B_{m \times n}$  и число  $\lambda$ .

A=	8	6
	6	8
	1	3
	2	7
	8	4

B=	8	4
	5	6
	9	4
	2	3
	6	8

Получить следующие матрицы:

$$C = \lambda \cdot A \text{ при } \lambda=4$$

$$D = A + B$$

$$F = A - B$$

Извлечь из матрицы B элемент  $b_{42}$

#### Результаты вычислений:

Количество строк в матрице A: **5**

Количество столбцов в матрице A: **2**

$$C = \lambda \cdot A$$

C=	32	24
	24	32
	4	12
	8	28
	32	16

$$D = A + B$$

D=	16	10
	11	14
	10	7
	4	10
	14	12

$$F = A - B$$

F=	0	2
	1	2
	-8	-1
	0	4
	2	-4

$b_{42} =$	3
------------	---

**Вариант №3**

 Заданы матрицы  $A_{m \times n}$  и  $B_{m \times n}$  и число  $\lambda$ .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 8 & 3 & 8 \\ 4 & 9 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Получить следующие матрицы:

$$C = \lambda \cdot A \text{ при } \lambda=2$$

$$D = A + B$$

$$F = A - B$$

 Извлечь из матрицы  $A$  элемент  $a_{23}$ 
**Результаты вычислений:**

 Количество строк в матрице  $A$ : **3**

 Количество столбцов в матрице  $A$ : **3**

$$C = \lambda \cdot A$$

6	14	6
16	6	16
8	18	8

$$D = A + B$$

11	8	10
14	6	13
6	13	12

$$F = A - B$$

-5	6	-4
2	0	3
2	5	-4

$a_{23} =$	8
------------	---

**Вариант №4**

 Заданы матрицы  $A_{m \times n}$  и  $B_{m \times n}$  и число  $\lambda$ .

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 8 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Получить следующие матрицы:

$$C = \lambda \cdot A \text{ при } \lambda=5$$

$$D = A + B$$

$$F = A - B$$

 Извлечь из матрицы  $B$  элемент  $b_{33}$ 
**Результаты вычислений:**

 Количество строк в матрице  $A$ : **4**

 Количество столбцов в матрице  $A$ : **3**

$$C = \lambda \cdot A$$

30	40	35
25	10	5
15	25	35
5	15	40

$$D = A + B$$

8	14	14
13	11	9
7	7	9
4	4	15

$$F = A - B$$

4	2	0
-3	-7	-7
-1	3	5
-2	2	1

$b_{33} =$	2
------------	---

**Вариант №5**

 Заданы матрицы  $A_{m \times n}$  и  $B_{m \times n}$  и число  $\lambda$ .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 2 \\ 9 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 5 \\ 4 & 4 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Получить следующие матрицы:

$$C = \lambda \cdot A \text{ при } \lambda=3$$

$$D = A + B$$

$$F = A - B$$

 Извлечь из матрицы  $A$  элемент  $a_{22}$ 
**Результаты вычислений:**

 Количество строк в матрице  $A$ : **4**

 Количество столбцов в матрице  $A$ : **2**

$$C = \lambda \cdot A$$

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 24 & 6 \\ 27 & 24 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$$

$$D = A + B$$

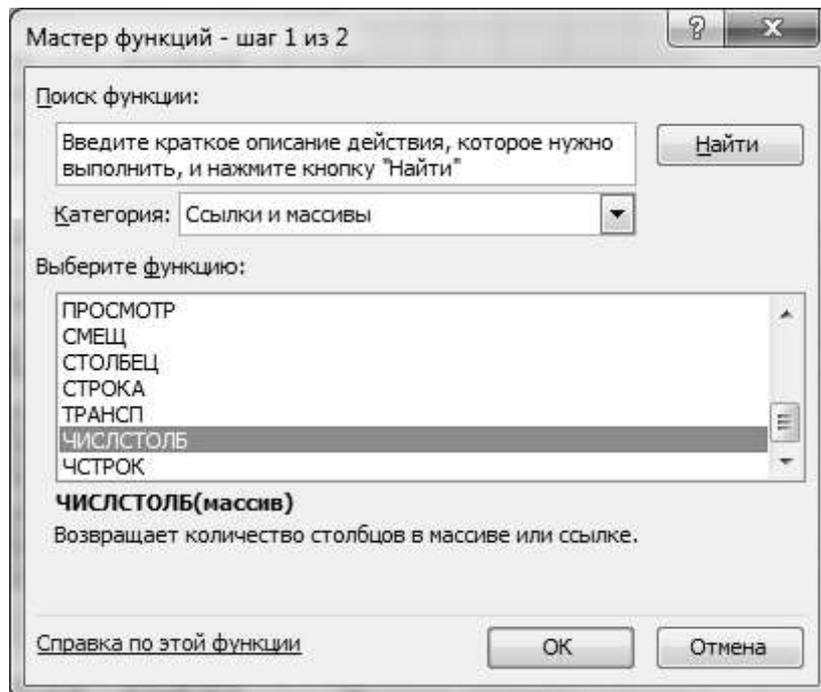
$$D = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 7 \\ 13 & 12 \\ 13 & 10 \end{bmatrix}$$

$$F = A - B$$

$$F = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -3 \\ 5 & 4 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$a_{22} =$	2
------------	---

**Выполнение задачи в Microsoft Excel**

 Ввести исходные данные: значения элементов матриц  $A$ ,  $B$  и значение переменной  $\lambda$  и отформатировать введенные значения.

**Рис. 1.1** Окно диалога *Мастер функций - шаг 1 из 2*

 Выбор функций *ЧСТРОК(...)* и *ЧИСЛСТОЛБ(...)*

 Для определения количества строк и столбцов в матрице  $A$  следует использовать

соответственно функции:

- ЧСТРОК(Массив) из категории Ссылки и массивы, которая возвращает количество строк в ссылке (массиве);
- ЧИСЛСТОЛБ(Массив) из категории Ссылки и массивы, которая возвращает количество столбцов в ссылке (массиве).

Для этого необходимо вызвать *Мастер функций*. В результате загрузится окно диалога *Мастер функций - шаг 1 из 2* (см. Рис.1.1), в котором в раскрывающемся списке *Категория*: выбрать категорию функций *Ссылки и массивы*, и в списке с прокруткой *Выберите функцию*: выбрать соответствующие функции. В раскрывшемся окне диалога *Аргументы функции* (см. Рис.1.2) в окне ввода аргумента функции *Массив* следует ввести ссылку на диапазон ячеек таблицы, в котором находятся элементы массива, для которого определяется количество строк или столбцов соответственно.

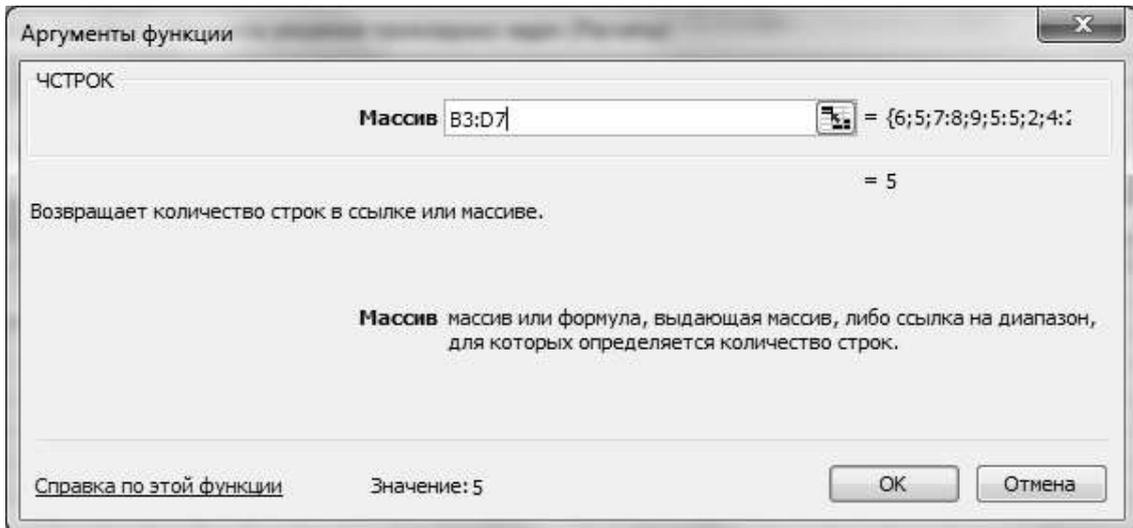


Рис. 1.2 Окно диалога *Аргументы функции ЧСТРОК()*

В данном практическом задании для подсчета количества строк и столбцов в матрице *A* в отдельных ячейках таблицы будут записаны формулы:

*Количество строк в матрице A:* =ЧСТРОК (*Матрица A*)

*Количество столбцов в матрице A:* =ЧИСЛСТОЛБ (*Матрица A*)

Для выполнения операций умножения матрицы на число, сложения двух матриц и вычитания из одной матрицы другой следует использовать соответствующие формулы для вычисления элементов результирующих матриц:

- умножение матрицы на число  $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$  ;
  - сложение матриц  $d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  ;
  - вычитание матриц  $f_{ij} = a_{ij} + (-1) \cdot b_{ij}$ ,
- где  $i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$ .

Для этого следует в отдельных ячейках таблицы записать формулы для вычисления первых элементов результирующих матриц:

- умножение матрицы на число  $c_{11} = \lambda \cdot a_{11}$ ;
- сложение матриц  $d_{11} = a_{11} + b_{11}$ ;
- вычитание матриц  $f_{11} = a_{11} + (-1) \cdot b_{11}$ .

Далее следует поэтапно скопировать эти формулы в смежные ячейки по строкам и по столбцам, то есть вниз  $i=1,2,\dots,m$  и вправо  $j=1,2,\dots,n$ , определяя размеры результирующих матриц (см. Рис.1.3, Рис.1.4, Рис.1.5). Операцию копирования можно выполнить или с помощью маркера заполнения по смежным ячейкам, который находится в правом нижнем уголке текущей ячейки:



или с помощью буфера обмена.

Размер результирующей матрицы при выполнении операций сложения и вычитания матриц, умножения матрицы на число равен размеру исходной матрицы.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	<b>Вариант №1</b>													
2	Задаются матрицы A, B, C и D.													
3	A=	6	5	7			B=	9	9	3		$\lambda=$	3	
4		8	9	5				5	5	4				
5		5	2	4				2	6	8				
6		2	8	6				3	5	1				
7		9	4	1				4	7	2				
8														
9	Результаты вычислений:													
10	Количество строк в матрице A:									5				
11	Количество столбцов в матрице A:									3				
12	$C = \lambda \cdot A$			$D = A + B$				$F = A - B$						
13		18	15	21			=B3+G3	10			-3	-4	4	
14		24	27	15			13	14	9		3	4	1	
15		15	6	12			7	8	12		3	-4	-4	
16		6	24	18			5	13	7		-1	3	5	
17		27	12	3			13	11	3		5	-3	-1	
18														

Рис. 1.3 Вычисление элемента  $c_{11} = \lambda \cdot a_{11}$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	<b>Вариант №1</b>													
2	Задаются матрицы A, B, C и D.													
3	A=	6	5	7		B=	9	9	3		λ=	3		
4		8	9	5			5	5	4					
5		5	2	4			2	6	8					
6		2	8	6			3	5	1					
7		9	4	1			4	7	2					
8														
9	Результаты вычислений:													
10	Количество строк в матрице A:										5			
11	Количество столбцов в матрице A:										3			
12	C = λ · A			D = A + B			F = A - B							
13		= \$L\$3 * B3					15	14	10		-3	-4	4	
14		24	27	15			13	14	9		3	4	1	
15		15	6	12			7	8	12		3	-4	-4	
16		6	24	18			5	13	7		-1	3	5	
17		27	12	3			13	11	3		5	-3	-1	
18														

**Рис. 1.4** Вычисление элемента  $d_{11} = a_{11} + b_{11}$ 

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	<b>Вариант №1</b>													
2	Задаются матрицы A, B, C и D.													
3	A=	6	5	7		B=	9	9	3		λ=	3		
4		8	9	5			5	5	4					
5		5	2	4			2	6	8					
6		2	8	6			3	5	1					
7		9	4	1			4	7	2					
8														
9	Результаты вычислений:													
10	Количество строк в матрице A:										5			
11	Количество столбцов в матрице A:										3			
12	C = λ · A			D = A + B			F = A - B							
13		18	15	21			15	14	10		=B3+(-1)*G3			
14		24	27	15			13	14	9		3	4	1	
15		15	6	12			7	8	12		3	-4	-4	
16		6	24	18			5	13	7		-1	3	5	
17		27	12	3			13	11	3		5	-3	-1	
18														

**Рис. 1.5** Вычисление элемента  $f_{11} = a_{11} + (-1) \cdot b_{11}$ 

*Замечание:* Перед копированием формулы умножения элемента матрицы  $a_{ij}$  на число  $\lambda$  необходимо в формуле  $=\lambda \cdot a_{11}$  ссылку на ячейку, в которой находится значение  $\lambda$ , зафиксировать (то есть установить абсолютную или смешанную ссылку на ячейку), чтобы при копировании формулы адрес этой ячейки в формуле не изменился, так как  $\lambda$  – постоянный множитель для всех элементов результирующей матрицы.

цы. Абсолютная ссылка на ячейку в формуле устанавливается с помощью функциональной клавиши *F4* или вводится с клавиатуры путем вставки символов *\$* перед адресом столбца и перед адресом строки (например, *\$F\$7*).

Для извлечения элемента из матрицы по указанному номеру строки и номеру столбца следует использовать функцию

*ИНДЕКС(Массив; Номер строки; Номер столбца)*

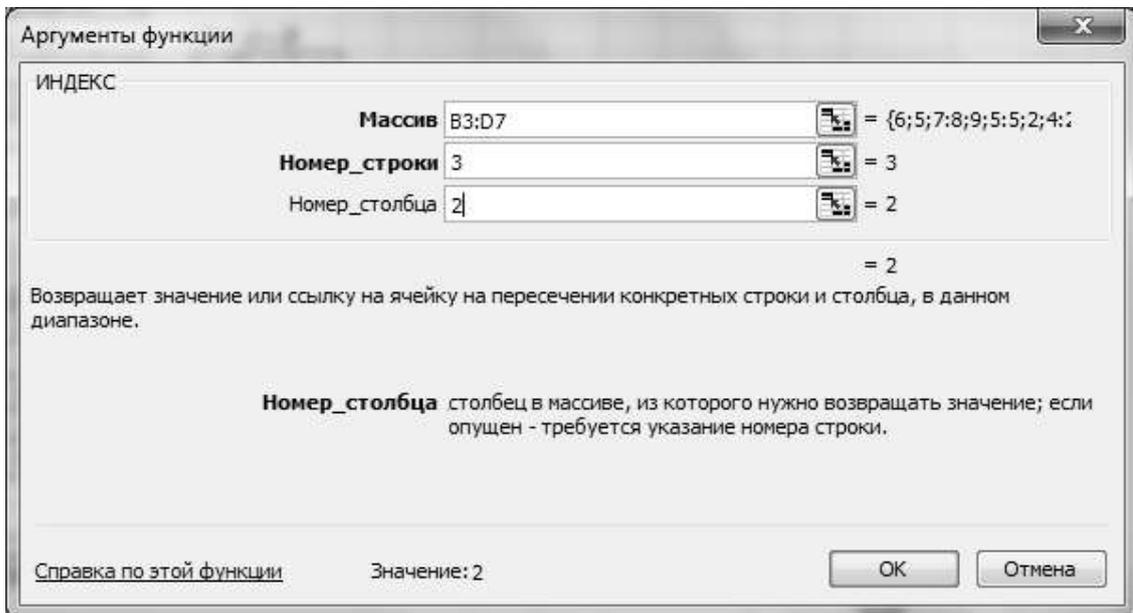
из категории *Ссылки и массивы*, которая возвращает значение или ссылку на ячейку на пересечении конкретных строки и столбца, в заданном диапазоне ячеек.

Для этого необходимо вызвать *Мастер функций*. В результате загрузится окно диалога *Мастер функций - шаг 1 из 2* (см. Рис.1.1), в котором в раскрывающемся списке *Категория*: выбрать категорию функций *Ссылки и массивы*, и в списке с прокруткой *Выберите функцию*: выбрать функцию *ИНДЕКС(...)*. В раскрывшемся окне диалога *Аргументы функции* (см. Рис.1.6) следует ввести следующие аргументы функции:

*Массив* – массив, из которого извлекается элемент;

*Номер строки* – номер строки, из которой извлекается элемент массива;

*Номер столбца* – номер столбца, из которого извлекается элемент массива.



**Рис. 1.6** Окно диалога *Аргументы функции ИНДЕКС( )*

В данном практическом задании для извлечения из матрицы *A* элемента  $a_{32}$  в отдельной ячейке таблицы будет записана формула:

$a_{32} =$	$= \text{ИНДЕКС} (\text{Матрица } A ; 3 ; 2 )$
------------	--

*Задачи: транспонирование матриц, умножение матриц, возведение матрицы в степень, вычисление обратной матрицы, вычисление единичной матрицы, вычисление определителя матрицы.*

**Вариант №1**

 Задаются матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

 $A =$ 

9	2
4	3
5	1
2	4

 $B =$ 

9	3	2
5	6	8

 $C =$ 

2	7	4	5
9	8	1	2
6	2	6	3

 $D =$ 

5	2	4	4
6	4	2	3
9	3	1	5
8	5	9	1

Получить следующие матрицы:

$T = A^T$

$F = D^3$

$G = A \cdot B$

$O = D^{-1}$

$H = A \cdot B \cdot C$

$E = D \cdot D^{-1}$

 Вычислить определитель:  $\Delta = |D|$ 
**Результаты вычислений:**

$T = A^T$

9	4	5	2
2	3	1	4

$G = A \cdot B$

91	39	34
51	30	32
50	21	18
38	30	36

$H = A \cdot B \cdot C$

737	1017	607	635
564	661	426	411
397	554	329	346
562	578	398	358

$F = D^3$

1801	852	1034	940
1715	816	984	885
2140	995	1147	1117
2487	1235	1669	1233

$O = D^{-1}$

-0,20	-0,27	0,30	0,12
-0,05	0,60	-0,30	-0,08
0,17	-0,11	-0,08	0,07
0,36	0,15	-0,14	-0,18

$E = D \cdot D^{-1}$

1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

$\Delta = |D|$

328
-----

**Вариант №2**

 Задаются матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

 $A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ 
 $B = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ 
 $C = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 8 & 2 \\ 9 & 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ 
 $D = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 2 \\ 9 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ 

Получить следующие матрицы:

$T = B^T$

$F = D^4$

$G = A \cdot B$

$O = D^{-1}$

$H = A \cdot B \cdot C$

$E = D \cdot D^{-1}$

 Вычислить определитель:  $\Delta = |D|$ 
**Результаты вычислений:**

$T = B^T$

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$G = AB$

$$\begin{bmatrix} 107 & 82 \\ 89 & 51 \\ 61 & 36 \end{bmatrix}$$

$H = A \cdot B \cdot C$

$$\begin{bmatrix} 1380 & 863 & 1102 & 788 \\ 993 & 649 & 865 & 535 \\ 690 & 449 & 596 & 374 \end{bmatrix}$$

$F = D^4$

$$\begin{bmatrix} 32774 & 18606 & 25550 \\ 12336 & 7193 & 9640 \\ 36303 & 20526 & 28291 \end{bmatrix}$$

$O = D^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 2,07 & -0,71 & -1,57 \\ 0,29 & 0,14 & -0,29 \\ -2,79 & 0,86 & 2,29 \end{bmatrix}$$

$E = D \cdot D^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Delta = |D|$

$$\boxed{14}$$
**Вариант №3**

 Задаются матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

 $A = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 7 \\ 8 & 6 \\ 6 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ 
 $B = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 & 7 \\ 5 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 
 $C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ 
 $D = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 & 8 \\ 9 & 8 & 5 & 9 \\ 3 & 1 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ 

Получить следующие матрицы:

$T = C^T$

$F = D^3$

$G = A \cdot B$

$O = D^{-1}$

$H = A \cdot B \cdot C$

$E = D \cdot D^{-1}$

 Вычислить определитель:  $\Delta = |D|$

**Результаты вычислений:**

$$T = C^T$$

3	7	5	1
5	8	4	2
1	9	7	6

$$G = A \cdot B$$

38	101	40	71
45	80	27	49
46	102	38	68
32	74	28	50
49	63	17	32

$$H = A \cdot B \cdot C$$

1092	1300	1653
879	1071	1248
1110	1334	1638
804	964	1194
705	881	927

$$F = D^3$$

2779	1126	3111	3181
4357	1894	4613	4934
1649	661	1873	1888
2670	1084	2938	3039

$$O = D^{-1}$$

-0,37	-0,01	0,35	0,24
-0,09	0,18	0,09	-0,18
-0,13	0,00	0,33	-0,05
0,52	-0,04	-0,61	-0,05

$$E = D \cdot D^{-1}$$

1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

$$\Delta = |D|$$

-484
------

**Вариант №4**

 Задаются матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 7 & 3 \\ 8 & 5 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 2 \\ 4 & 7 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 \\ 5 & 9 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 9 & 1 \\ 9 & 5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Получить следующие матрицы:

$$T = B^T$$

$$F = D^4$$

$$G = A \cdot B$$

$$O = D^{-1}$$

$$H = A \cdot B \cdot C$$

$$E = D \cdot D^{-1}$$

 Вычислить определитель:  $\Delta = |D|$ 
**Результаты вычислений:**

$$T = B^T$$

6	7	4	9
3	2	7	4

$$G = A \cdot B$$

105	83
164	117

$$H = A \cdot B \cdot C$$

1028	708
1593	1030

$$F = D^4$$

77073	92833	79581	54745
68589	86630	75578	48274
49736	65558	58064	34701
72222	86293	73745	51379

$O = D^{-1}$

-0,40	-0,03	0,04	0,47
0,03	0,40	-0,26	-0,19
0,00	-0,29	0,30	0,09
0,57	-0,14	0,00	-0,43

$E = D \cdot D^{-1}$

1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

$\Delta = |D|$

-322
------

**Вариант №5**

 Задаются матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

 $A =$ 

3	1
4	9
2	6
8	4
9	5

 $B =$ 

4	1	7
2	3	9

 $C =$ 

2	4
1	7
4	8

 $D =$ 

9	2	2
2	6	1
6	9	4

Получить следующие матрицы:

$T = A^T$

$F = D^3$

$G = A \cdot B$

$O = D^{-1}$

$H = A \cdot B \cdot C$

$E = D \cdot D^{-1}$

 Вычислить определитель:  $\Delta = |D|$ 
**Результаты вычислений:**

$T = A^T$

3	4	2	8	9
1	9	6	4	5

$G = A \cdot B$

14	6	30
34	31	109
20	20	68
40	20	92
46	24	108

$H = A \cdot B \cdot C$

154	338
535	1225
332	764
468	1036
548	1216

$F = D^3$

1137	734	354
506	492	177
1290	1137	442

$O = D^{-1}$

0,16	0,11	-0,11
-0,02	0,25	-0,05
-0,19	-0,73	0,53

$E = D \cdot D^{-1}$

1	0	0
0	1	0
0	0	1

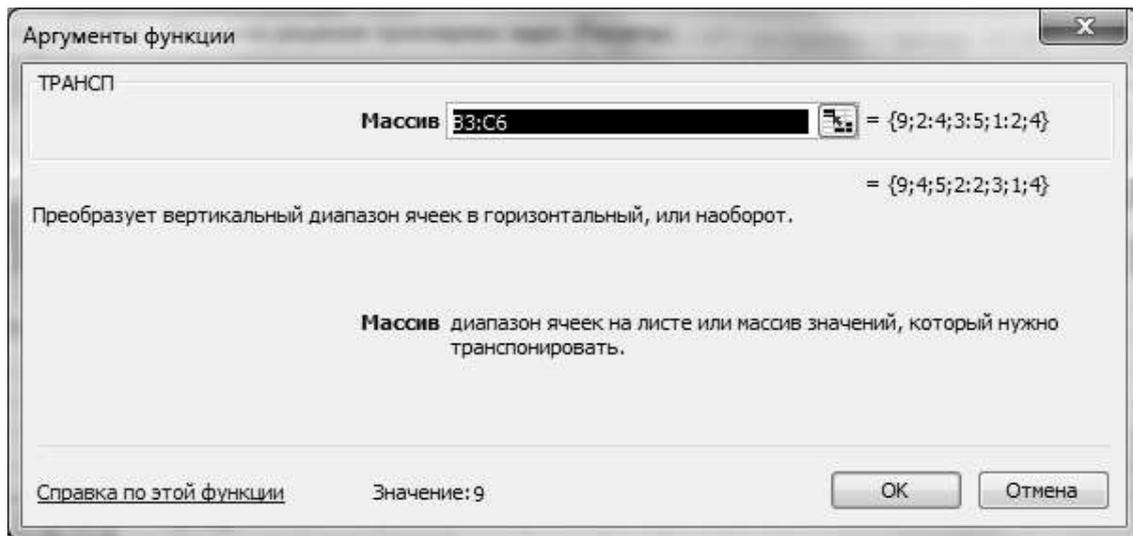
$\Delta = |D|$

95
----

### Выполнение задачи в *Microsoft Excel*

Ввести исходные данные – значения элементов матриц *A*, *B*, *C* и *D* и отформатировать введенные значения.

Для выполнения операции транспонирования матрицы следует использовать функцию *ТРАНСП(Массив)* из категории *Ссылки и массивы*, которая преобразует вертикальный диапазон ячеек таблицы в горизонтальный диапазон ячеек, и наоборот.



**Рис. 1.7** Окно *Аргументы функции ТРАНСП(...)*

Для этого необходимо вызвать *Мастер функций*. В результате загрузится окно диалога *Мастер функций - шаг 1 из 2* (см. Рис.1.1), в котором в раскрывающемся списке *Категория*: выбрать категорию функций *Ссылки и массивы*, и в списке с прокруткой *Выберите функцию*: выбрать функцию *ТРАНСП(Массив)*. В раскрывшемся окне диалога *Аргументы функции* (см. Рис.1.7) в окне ввода аргумента функции *Массив* следует ввести ссылки на ячейки таблицы, в которых находятся элементы массива, который необходимо транспонировать.

В данном практическом задании, при выполнении операции транспонирования матрицы *A*, в ячейке будет записана формула:

$$= \text{ТРАНСП}(\text{матрица } A)$$

*Размер результирующей матрицы*, после выполнения операции транспонирования, определяется следующим образом - количество строк результирующей матрицы должно быть равно количеству столбцов исходной матрицы, а количество столбцов результирующей матрицы должно быть равно количеству строк исходной матрицы.

Для получения результирующей матрицы после вызова функции *ТРАНСП(...)*, ввода ее аргументов и выхода из *Мастера функций*, необходимо выполнить последовательность шагов, которая применяется только при работе с массивами:

1. Выделить область таблицы, начиная с той ячейки, в которой была записана функция *ТРАНСП(Массив)*, определяя размер результирующей матрицы.
2. Нажать функциональную клавишу *F2* и, войдя в режим редактирования ячейки, нажать комбинацию клавиш *Ctrl + Shift + Enter*.

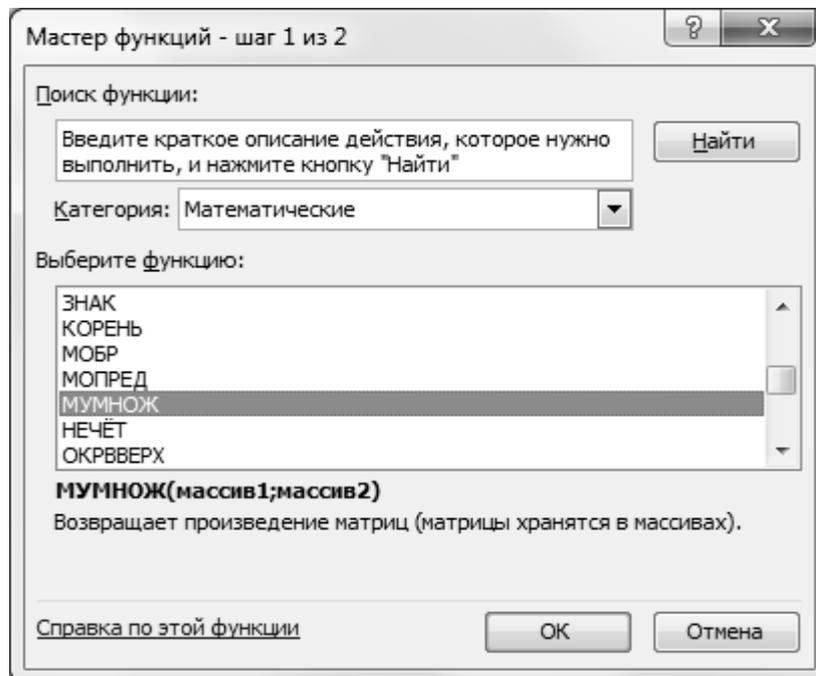
В результате чего *Microsoft Excel* заполнит выделенный диапазон ячеек таблицы значениями элементов транспонированной матрицы. При этом выражение формулы в *Строке формул* будет взято в фигурные скобки:

$$\{ = \text{ТРАНСП} (\text{матрица\_A} ) \}$$

Для выполнения операции умножения матриц следует использовать функцию

$$\text{МУМНОЖ} (\text{Массив\_1}; \text{Массив\_2})$$

из категории *Математические*, которая возвращает произведение двух матриц.



**Рис. 1.8** Окно диалога *Мастер функций - шаг 1 из 2*.

Выбор функции *МУМНОЖ(...)*

Для этого необходимо вызвать *Мастер функций*. В результате загрузится окно диалога *Мастер функций - шаг 1 из 2* (см. Рис.1.8), в котором в раскрывающемся списке *Категория*: выбрать категорию функций *Математические*, и в списке с прокруткой *Выберите функцию*: выбрать функцию

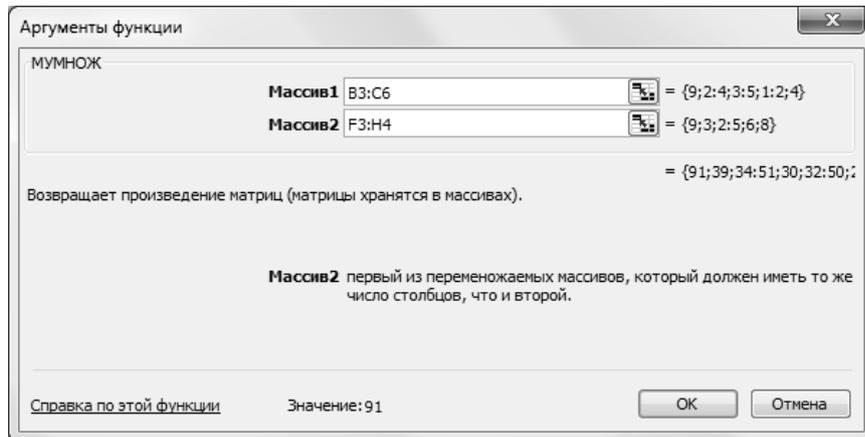
$$\text{МУМНОЖ} (\text{Массив\_1}; \text{Массив\_2}).$$

В раскрывшемся окне диалога *Аргументы функции* (см. Рис.1.9) в окне ввода аргумента функции *Массив\_1* следует ввести ссылки на ячейки таблицы, в которых находятся значения элементов первой матрицы, а в окне ввода аргумента *Массив\_2*

– ссылки на ячейки таблицы, в которых находятся значения элементов второй матрицы.

В данном практическом задании, если необходимо перемножить матрицу  $A$  на матрицу  $B$ , то в отдельной ячейке таблицы будет записана формула:

$$= \text{МУМНОЖ} (\text{матрица\_A} ; \text{матрица\_B} )$$



**Рис. 1.9** Окно *Аргументы функции МУМНОЖ(...)*

*Размер результирующей матрицы*, после выполнения операции умножения двух матриц, определяется следующим образом - количество строк результирующей матрицы должно быть равно количеству строк первой матрицы, а количество столбцов результирующей матрицы должно быть равно количеству столбцов второй матрицы. Например:

$$A_{4 \times 2} \times B_{2 \times 3} = C_{4 \times 3}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{123} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{pmatrix}$$

Для получения результирующей матрицы после вызова функции  $\text{МУМНОЖ}(\dots)$ , ввода ее аргументов и выхода из *Мастера функций*, необходимо выполнить последовательность шагов, которая применяется только при работе с массивами:

1. Выделить область таблицы, начиная с той ячейки, в которой была записана функция  $\text{МУМНОЖ}(\text{Массив\_1}; \text{Массив\_2})$ , определяя размер результирующей матрицы.
2. Нажать клавишу  $F2$  и, войдя в режим редактирования ячейки, нажать комбинацию клавиш  $Ctrl + Shift + Enter$ .

В результате *Microsoft Excel* заполнит выделенный диапазон ячеек таблицы значениями элементов полученной матрицы. При этом выражение формулы в *Строке формул* будет взято в фигурные скобки:

$$\{ = \text{МУМНОЖ} ( \text{матрица\_A} ; \text{матрица\_B} ) \}$$

*Замечание:* При умножении трех и более матриц можно перемножать последовательно одну матрицу на другую, получая промежуточные матрицы, или воспользоваться вложением одной функции  $\text{МУМНОЖ}(\text{Массив\_1}; \text{Массив\_2})$  в другую.

Например, чтобы получить произведение матриц  $A \times B \times C$ , можно воспользоваться одним из свойств выполнения операций над матрицами:

$$A \times B \times C = A \times (B \times C) = (A \times B) \times C.$$

При использовании вложенных функций выражение в *Строке формул* будет выглядеть следующим образом:

для варианта  $A \times (B \times C)$ :

$$= \text{МУМНОЖ} \left( \underbrace{\text{массив A}}_{\text{массив 1}} ; \underbrace{\text{МУМНОЖ} \left( \underbrace{\text{массив B}}_{\text{массив 1}} ; \underbrace{\text{массив C}}_{\text{массив 2}} \right)}_{\text{массив 2}} \right),$$

для варианта  $(A \times B) \times C$ :

$$= \text{МУМНОЖ} \left( \underbrace{\text{МУМНОЖ} \left( \underbrace{\text{массив A}}_{\text{массив 1}} ; \underbrace{\text{массив B}}_{\text{массив 2}} \right)}_{\text{массив 1}} ; \underbrace{\text{массив C}}_{\text{массив 2}} \right).$$

*Размер результирующей матрицы* после выполнения операции умножения нескольких матриц определяется следующим образом: количество строк результирующей матрицы должно быть равно количеству строк первой матрицы, а количество столбцов результирующей матрицы должно быть равно количеству столбцов последней матрицы.

Для выполнения операции возведения матрицы в степень следует также использовать функцию  $\text{МУМНОЖ}(\text{Массив\_1}; \text{Массив\_2})$  из категории *Математические*, которая возвращает произведение двух матриц. Если же степень, в которую возводится матрица, больше двух, то для возведения матрицы в степень следует также воспользоваться вложением одной функции  $\text{МУМНОЖ}(\text{Массив\_1}; \text{Массив\_2})$  в другую.

Например:  $D^3 = D \times D \times D = D \times (D \times D) = (D \times D) \times D \Rightarrow$

$$= \text{МУМНОЖ} \left( \underbrace{\text{массив } D}_{\text{Массив\_1}}; \underbrace{\text{МУМНОЖ} \left( \underbrace{\text{массив } D}_{\text{Массив\_1}}; \underbrace{\text{массив } D}_{\text{Массив\_2}} \right)}_{\text{Массив\_2}} \right)$$

ИЛИ

$$= \text{МУМНОЖ} \left( \underbrace{\text{МУМНОЖ} \left( \underbrace{\text{массив } D}_{\text{Массив\_1}}; \underbrace{\text{массив } D}_{\text{Массив\_2}} \right)}_{\text{Массив\_1}}; \underbrace{\text{массив } D}_{\text{Массив\_2}} \right)$$

Например:  $D^4 = D \times D \times D \times D = (D \times D) \times (D \times D) \Rightarrow$

$$= \text{МУМНОЖ} \left( \underbrace{\text{МУМНОЖ} \left( \underbrace{\text{массив } D}_{\text{Массив\_1}}; \underbrace{\text{массив } D}_{\text{Массив\_2}} \right)}_{\text{Массив\_1}}; \underbrace{\text{МУМНОЖ} \left( \underbrace{\text{массив } D}_{\text{Массив\_1}}; \underbrace{\text{массив } D}_{\text{Массив\_2}} \right)}_{\text{Массив\_2}} \right)$$

Размер результирующей матрицы, после выполнения операции возведения в степень, равен размеру исходной матрицы, так как в степень можно возводить только квадратную матрицу.

Для вычисления обратной матрицы следует использовать функцию *МОБР(Массив)* из категории *Математические*, которая возвращает обратную матрицу. Необходимо помнить, что обратную матрицу можно получить только от квадратной матрицы.

Для этого необходимо вызвать *Мастер функций*. В результате загрузится окно диалога *Мастер функций - шаг 1 из 2* (см. Рис.1.10), в котором в раскрывающемся списке *Категория*: выбрать категорию функций *Математические*, и в списке с прокруткой *Выберите функцию*: выбрать функцию *МОБР(...)*.

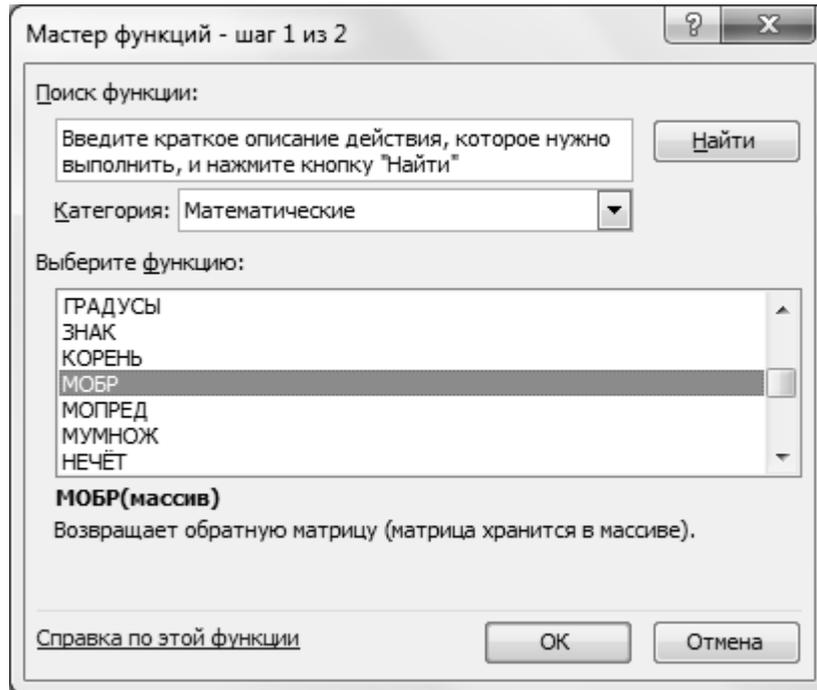


Рис. 1.10 Окно *Мастер функций – шаг 1 из 2*.  
 Выбор функции *МОБР(...)*

В раскрывшемся окне диалога *Аргументы функции* (см. Рис.1.11) в окне ввода аргумента функции *Массив* ввести ссылки на ячейки таблицы, в которых находятся значения элементов исходной матрицы.

В данном задании, для получения обратной матрицы от матрицы  $D$ , в отдельной ячейке таблицы будет записана формула:

$$= \text{МОБР} (\text{матрица } D)$$

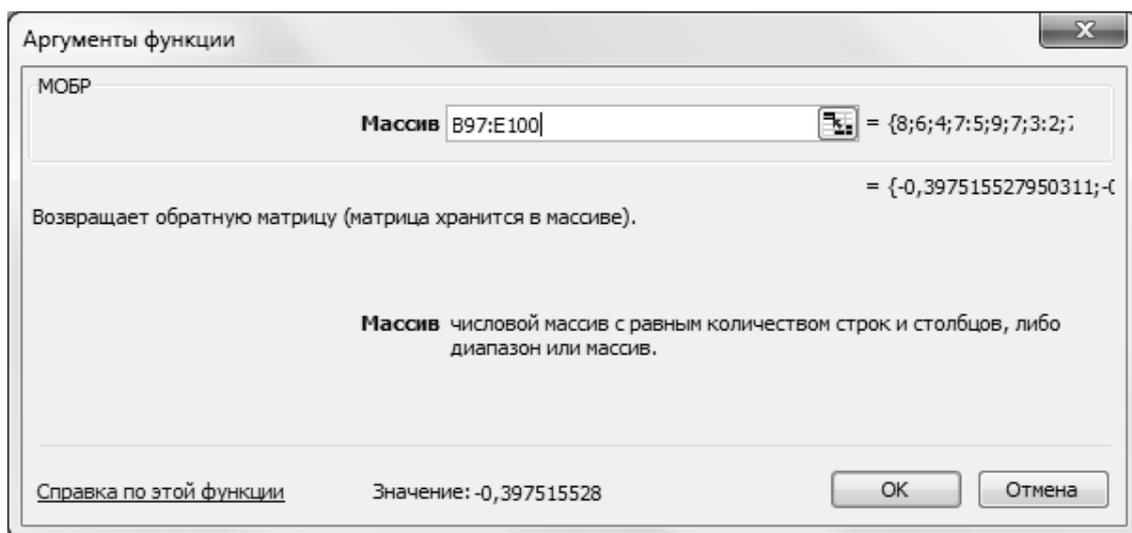


Рис. 1.11 Окно диалога *Аргументы функции МОБР(...)*

*Размер результирующей матрицы*, в случае получения обратной матрицы, равен размеру исходной матрицы.

Для получения результирующей матрицы после вызова функции *МОБР(...)*, ввода ее аргументов и выхода из *Мастера функций*, необходимо выполнить последовательность шагов, которая применяется только при работе с массивами:

1. Выделить область таблицы, начиная с той ячейки, в которой была записана функция *МОБР(Массив)*, определяя размер результирующей матрицы.
2. Нажать клавишу *F2* и, войдя в режим редактирования ячейки, нажать комбинацию клавиш *Ctrl + Shift + Enter*.

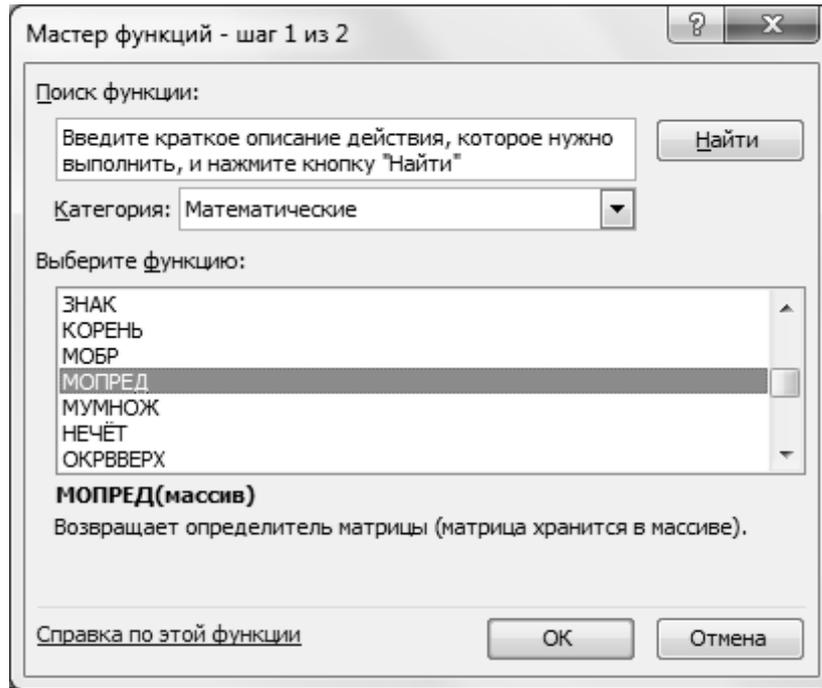
В результате *Microsoft Excel* заполнит выделенный диапазон ячеек таблицы значениями элементов полученной матрицы. При этом выражение в *Строке формул* будет взято в фигурные скобки:  $\{=МОБР(матрица\_D)\}$ .

Для вычисления определителя матрицы следует использовать функцию *МОПРЕД(...)* из категории *Математические*, которая возвращает определитель матрицы. Для этого необходимо вызвать *Мастер функций*. В результате загрузится окно диалога *Мастер функций - шаг 1 из 2* (см. Рис.1.12), в котором в раскрывающемся списке *Категория*: выбрать категорию функций *Математические*, и в списке с прокруткой *Выберите функцию*: выбрать функцию *МОПРЕД(...)*. В раскрывшемся окне диалога *Аргументы функции* (см. Рис.1.13) в окне ввода аргумента функции *Массив* ввести ссылки на ячейки таблицы, в которых находятся значения элементов матрицы, от которой вычисляется определитель.

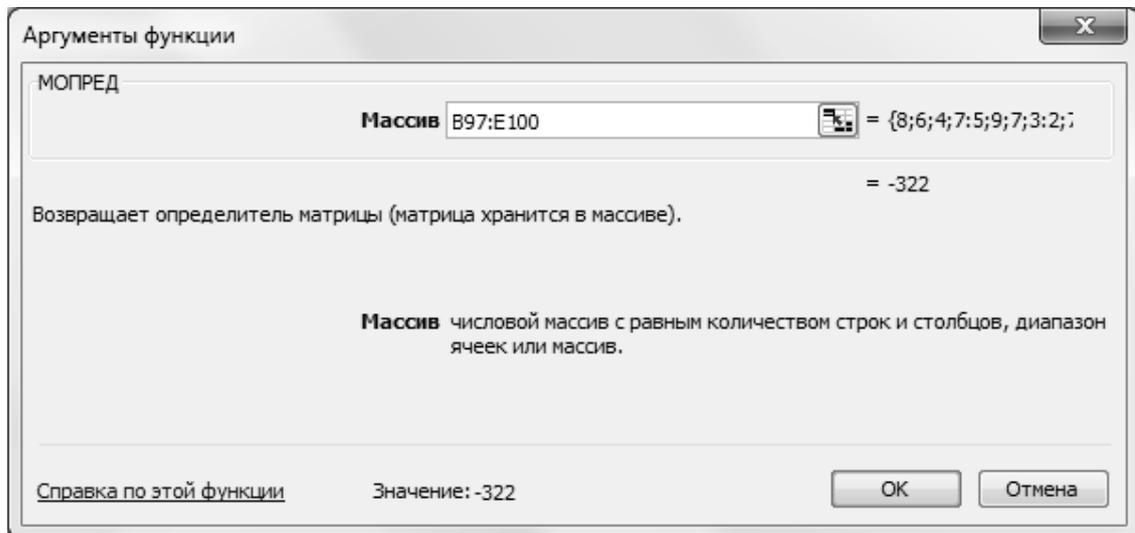
В результате *Microsoft Excel* вернет в ячейку таблицы значение определителя указанной матрицы.

В данном случае для вычисления определителя матрицы *D* в отдельной ячейке таблицы будет записана формула:

$$=МОПРЕД( матрица\_D)$$



**Рис. 1.12** Окно диалога *Мастер функций - шаг 1 из 2*.  
 Выбор функции *МОПРЕД(...)*



**Рис. 1.13** Окно *Аргументы функции МОПРЕД(...)*

## Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Дана система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1} \cdot x_{n1} + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases} \quad (1.1)$$

Числа  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) называются *коэффициентами при переменных*,  $b_i$  – *свободными членами*.

Система линейных алгебраических уравнений называется *однородной*, если все ее свободные члены равны нулю:  $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ . Иначе система называется *неоднородной*.

Совокупность чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называется *решением системы*, если при подстановке их вместо переменных во все уравнения они обращаются в тождества.

Система  $n$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  переменными называется *несовместной*, если у нее нет ни одного решения, и *совместной*, если она имеет, хотя бы, одно решение.

Совместная система уравнений, имеющая одно решение, называется *определенной*, а более одного – *неопределенной*.

Если уравнений системы больше, чем неизвестных. то система называется *переопределённой*.

Система (1.1) может быть записана, также, в следующем виде:

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \dots + a_{in} \cdot x_n = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

или

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

В матричном виде система может быть записана следующим образом:

$$A \times x = b, \quad (1.2)$$

где  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$  – *матрица коэффициентов при переменных*,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{вектор переменных}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} - \text{вектор свободных членов.}$$

### 1. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы

Решением системы (1.1) методом обратной матрицы является вектор-столбец:

$$x = A^{-1} \times b,$$

где  $A^{-1}$  – обратная матрица к исходной матрице  $A$ ,  $b$  – вектор свободных членов.

### 2. Решение системы линейных алгебраических уравнений по правилу Крамера

Пусть  $\Delta$  – определитель матрицы системы  $A$ ;

$$\Delta_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{дополнительный определитель, полученный из}$$

определителя системы  $\Delta$  посредством замены  $j$ -го столбца на столбец свободных членов системы ( $j = 1, \dots, n$ ).

Тогда, если  $\Delta \neq 0$ , то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Если  $\Delta = 0$  и  $\Delta_j = 0, j=1, 2, \dots, n$ , то система имеет бесконечное множество решений.

Если  $\Delta = 0$  и  $\Delta_j \neq 0$  для всех  $j=1, 2, \dots, n$ , то система не имеет.

## Решение систем линейных алгебраических уравнений

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений, заданной в матричном виде, методом обратной матрицы, по правилу Крамера и с помощью модуля *Поиск решения*.

### Вариант №1

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 8 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ 46 \end{bmatrix}$$

Найти решение системы  $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ .

#### Результаты вычислений:

1-й способ. Методом обратной матрицы.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0,04 & 0,16 & 0,05 \\ 0,11 & -0,10 & 0,21 \\ 0,15 & 0,00 & 0,06 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2-й способ. По правилу Крамера.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{bmatrix} 209 \\ 836 \\ 1672 \\ 418 \end{bmatrix} & x_1 &= \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \Delta_1 &= \begin{bmatrix} 836 \\ 1672 \\ 418 \end{bmatrix} & x_2 &= \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \Delta_2 &= \begin{bmatrix} 209 \\ 1672 \end{bmatrix} & x_3 &= \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \\ \Delta_3 &= \begin{bmatrix} 209 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### Вариант №2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & 8 \\ 6 & 7 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 23 \\ -3 \\ 81 \end{bmatrix}$$

Найти решение системы  $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ .

#### Результаты вычислений:

1-й способ. Методом обратной матрицы.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1,55 & -1,08 & 0,43 \\ 1,20 & 0,80 & -0,20 \\ 0,45 & 0,43 & -0,08 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2-й способ. По правилу Крамера.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{bmatrix} 40 \\ 80 \\ 360 \end{bmatrix} & x_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix} \\ \Delta_1 &= \begin{bmatrix} 80 \\ 360 \end{bmatrix} & x_2 &= \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix} \\ \Delta_2 &= \begin{bmatrix} 40 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Delta_3 = \boxed{120}$$

$$x_3 = \boxed{3}$$

**Вариант №3**

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & -3 & 6 \\ \hline 3 & 1 & -2 \\ \hline 2 & 3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$b = \begin{array}{|c|} \hline 30 \\ \hline 12 \\ \hline 34 \\ \hline \end{array}$$

 Найти решение системы  $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ .

**Результаты вычислений:**

1-й способ. Методом обратной матрицы.

$$A^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0,09 & 0,27 & 0,00 \\ \hline -0,11 & -0,09 & 0,25 \\ \hline 0,08 & -0,14 & 0,13 \\ \hline \end{array}$$

$$x = \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}$$

2-й способ. По правилу Крамера.

$$\Delta = \boxed{88}$$

$$\Delta_1 = \boxed{528}$$

$$\Delta_2 = \boxed{352}$$

$$\Delta_3 = \boxed{440}$$

$$x_1 = \boxed{6}$$

$$x_2 = \boxed{4}$$

$$x_3 = \boxed{5}$$

**Вариант №4**

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & -1 \\ \hline 3 & -1 & 2 \\ \hline 4 & 2 & -5 \\ \hline \end{array}$$

$$b = \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline 5 \\ \hline 9 \\ \hline \end{array}$$

 Найти решение системы  $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ .

**Результаты вычислений:**

1-й способ. Методом обратной матрицы.

$$A^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0,07 & 0,20 & 0,07 \\ \hline 1,53 & -0,40 & -0,47 \\ \hline 0,67 & 0,00 & -0,33 \\ \hline \end{array}$$

$$x = \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

2-й способ. По правилу Крамера.

$$\Delta = \boxed{15}$$

$$\Delta_1 = \boxed{30}$$

$$\Delta_2 = \boxed{45}$$

$$\Delta_3 = \boxed{15}$$

$$x_1 = \boxed{2}$$

$$x_2 = \boxed{3}$$

$$x_3 = \boxed{1}$$

**Вариант №5**

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 2 & -1 \\ \hline 4 & -1 & 3 \\ \hline 3 & 2 & -2 \\ \hline \end{array} \quad b = \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline -3 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

 Найти решение системы  $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ .

**Результаты вычислений:**

1-й способ. Методом обратной матрицы.

$$A^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & -2 & -5 \\ \hline -17 & 9 & 22 \\ \hline -11 & 6 & 14 \\ \hline \end{array} \quad x = \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline 5 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

2-й способ. По правилу Крамера.

$$\begin{array}{l} \Delta = \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline \end{array} \\ \Delta_1 = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\ \Delta_2 = \begin{array}{|c|} \hline -5 \\ \hline \end{array} \\ \Delta_3 = \begin{array}{|c|} \hline -2 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 = \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline \end{array} \\ x_2 = \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \\ x_3 = \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

**Вариант №6**

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 8 & 6 & 1 & -3 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 3 & -7 \\ \hline -9 & -3 & -2 & -4 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 1 & -8 & 2 \\ \hline 0 & 4 & -4 & -2 & 2 \\ \hline \end{array} \quad b = \begin{array}{|c|} \hline 62 \\ \hline 12 \\ \hline -68 \\ \hline 15 \\ \hline -8 \\ \hline \end{array}$$

**Результаты вычислений:**  $x = (6, 2, 5, 1, 3)$ 
**Вариант №7**

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 6 & 0 & 2 & -4 & 8 \\ \hline -1 & 9 & 5 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 2 & -5 & 8 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 10 & 4 \\ \hline 0 & 4 & 5 & -2 & 7 \\ \hline \end{array} \quad b = \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 28 \\ \hline -72 \\ \hline -26 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}$$

**Результаты вычислений:**  $x = (3, -1, 8, -2, -5)$ 
**Вариант №8**

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 9 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ \hline 10 & -6 & -2 & 7 & 1 \\ \hline 5 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ \hline 11 & 9 & 0 & 1 & 17 \\ \hline 10 & 6 & 8 & 3 & -12 \\ \hline \end{array} \quad b = \begin{array}{|c|} \hline -52 \\ \hline -36 \\ \hline -17 \\ \hline -143 \\ \hline -41 \\ \hline \end{array}$$

**Результаты вычислений:**  $x = (-5, -4, 0, -1, -3)$

### Вариант №9

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -2 & -5 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -3 & -6 & 2 & 15 \\ \hline 11 & 2 & 6 & 10 & 0 \\ \hline 1 & 4 & 8 & 13 & 1 \\ \hline 0 & 16 & 4 & -7 & 12 \\ \hline \end{array}$$

$$b = \begin{array}{|c|} \hline -5 \\ \hline 71 \\ \hline 100 \\ \hline 29 \\ \hline 68 \\ \hline \end{array}$$

**Результаты вычислений:**  $x = (8, 0, 2, 0, 5)$

### Вариант №10

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 10 & 0 & 12 & 1 & -7 \\ \hline 0 & 8 & -2 & 8 & 0 \\ \hline 1 & 12 & 3 & 18 & 5 \\ \hline 0 & 6 & 3 & -3 & 10 \\ \hline 11 & 7 & -4 & -8 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$b = \begin{array}{|c|} \hline -20 \\ \hline 48 \\ \hline 93 \\ \hline 57 \\ \hline 36 \\ \hline \end{array}$$

**Результаты вычислений:**  $x = (0, 5, 0, 1, 3)$

## Выполнение задач в *Microsoft Excel*

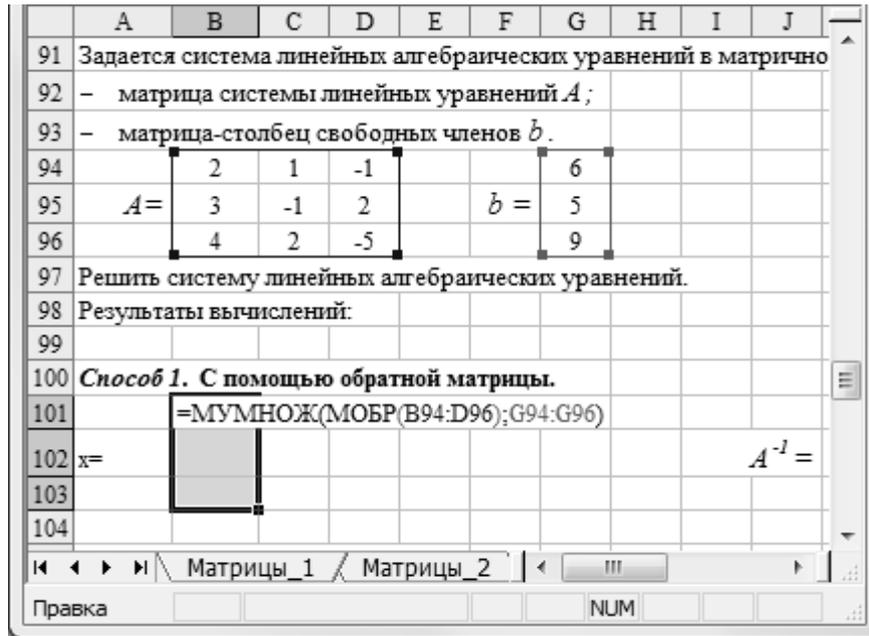
### 1. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы

Ввести исходные данные – значения элементов матрицы системы линейных алгебраических уравнений  $A$  и значения элементов столбца свободных членов  $b$  и отформатировать введенные значения.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы следует использовать следующее выражение:  $x = A^{-1} \times b$ .

Для вычисления обратной матрицы  $A^{-1}$  следует использовать функцию *МОБР(Массив)* из категории *Математические*, а для вычисления произведения двух матриц следует использовать функцию *МУМНОЖ(Массив\_1;Массив\_2)*, также из категории *Математические*. Возможности предлагаемых функций, их описание и примеры использования были описаны выше в разделе *Матрицы. Операции, выполняемые над матрицами*. В результате применения данных функций в *Строке формул* должно быть записано следующее выражение:

$$=МУМНОЖ\left(\underbrace{МОБР(Массив\ A)}_{Массив\_1}; \underbrace{Массив\ b}_{Массив\_2}\right).$$



**Рис. 1.14** Умножение двух матриц

Размер результирующей матрицы, после выполнения операции умножения двух матриц, будет следующим - количество строк равно количеству строк первой матрицы  $A^{-1}$ , а количество столбцов равно количеству столбцов второй матрицы  $b$  (в частном случае это будет матрица размерностью 3 строки на 1 столбец).

Для получения результирующей матрицы после вызова функции МУМНОЖ(...), ввода ее аргументов и выхода из Мастера функций, необходимо выполнить последовательность шагов, которая применяется при работе с массивами:

1. Выделить область таблицы, начиная с той ячейки, в которой была записана функция МУМНОЖ(МОБР(Массив  $A$ );Массив  $b$ ), определяя размер результирующей матрицы – 3 строки на 1 столбец.
2. Нажать клавишу  $F2$  и войдя в режим редактирования ячейки, нажать комбинацию клавиш  $Ctrl + Shift + Enter$ .

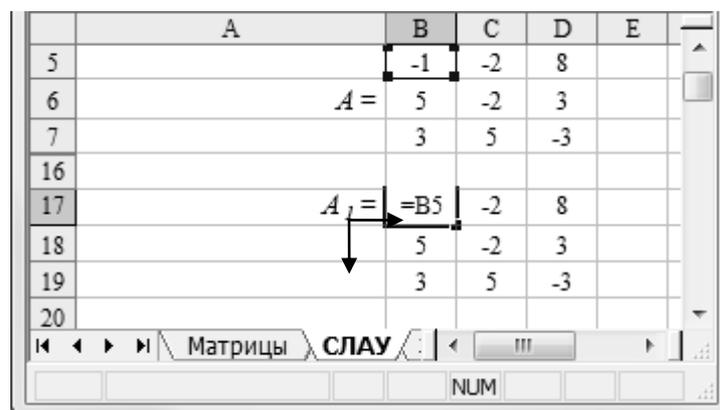
В результате *Microsoft Excel* заполнит выделенный диапазон ячеек таблицы значениями элементов столбца переменных  $x$ . При этом выражение формулы в Строке формул будет взято в фигурные скобки:

$$\{=МУМНОЖ(МОБР(Массив\_A);Массив\_b)\}$$

## 2. Решение системы линейных алгебраических уравнений по правилу Крамера

Ввести исходные данные – значения элементов матрицы системы линейных уравнений  $A$  и значения элементов столбца свободных членов  $b$  и отформатировать введенные значения.

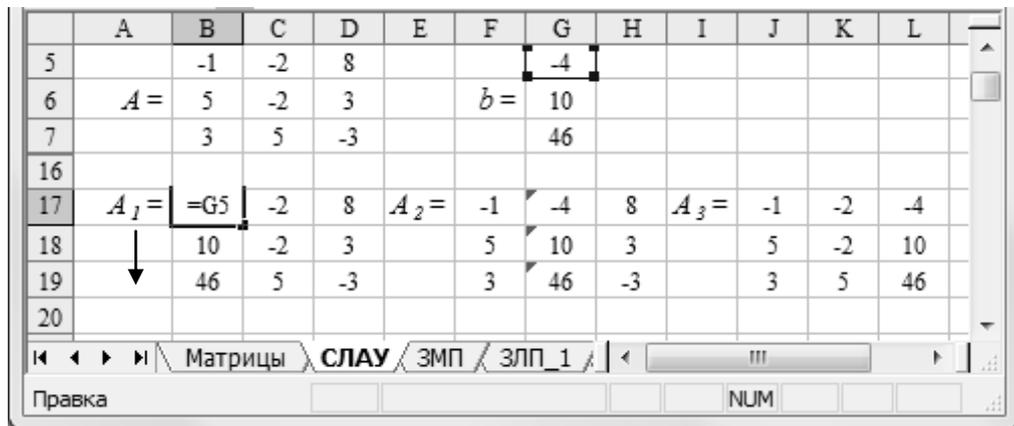
1. Вычислить определитель  $\Delta$  исходной матрицы системы  $A$ . Для этого необходимо вызвать *Мастер функций*. В результате загрузится окно диалога *Мастер функций - шаг 1 из 2* (см. Рис.1.12), в котором в раскрывающемся списке *Категория:* выбрать категорию функций *Математические*, и в списке с прокруткой *Выберите функцию:* выбрать функцию *МОПРЕД(...)*, которая вычисляет определитель матрицы. В раскрывшемся окне диалога *Аргументы функции* (см. Рис.1.13) в окне поля ввода аргумента *Массив* ввести ссылки на ячейки таблицы, в которых находятся значения элементов матрицы системы  $A$ , определитель которой необходимо вычислить. В результате *Microsoft Excel* вернет в ячейку таблицы значение определителя матрицы системы  $A$ .
2. Следует заменить первый столбец в исходной матрице системы  $A$  на столбец свободных членов  $b$  и вычислить определитель  $\Delta_1$  полученной матрицы. Для этого необходимо скопировать элементы матрицы системы  $A$  в отдельную часть таблицы. А именно: записать в ячейке формулу  $=a_{11}$  и скопировать ее в смежные ячейки таблицы с помощью маркера заполнения по смежным ячейкам, определяя размер результирующей матрицы, который равен размеру исходной матрицы системы  $A$  (в данном случае – матрица  $3 \times 3$ ) (см. Рис.1.15).



**Рис. 1.15** Копирование элементов матрицы  $A$

В полученной после копирования матрице системы  $A$  первый столбец заменить на столбец свободных членов  $b$  аналогичным образом: вместо первого элемента матрицы системы  $a_{11}$  записать формулу  $=b_1$ , и скопировать эту формулу вниз по ячейкам таблицы с помощью маркера заполнения по смежным ячейкам, заменяя

первый столбец полученной матрицы системы на столбец свободных членов  $b$  (см. Рис.1.16).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
5		-1	-2	8			-4					
6	$A =$	5	-2	3		$b =$	10					
7		3	5	-3			46					
16												
17	$A_1 =$	$=G5$	-2	8	$A_2 =$	-1	-4	8	$A_3 =$	-1	-2	-4
18	↓	10	-2	3		5	10	3		5	-2	10
19		46	5	-3		3	46	-3		3	5	46
20												

**Рис. 1.16** Замена 1-го столбца матрицы  $A$  на столбец свободных членов  $b$

После получения матрицы, равной матрице системы  $A$ , в которой первый столбец заменен на столбец свободных членов  $b$ , необходимо вычислить определитель  $\Delta$  полученной матрицы с помощью функции  $МОПРЕД(Массив)$  из категории *Математические*.

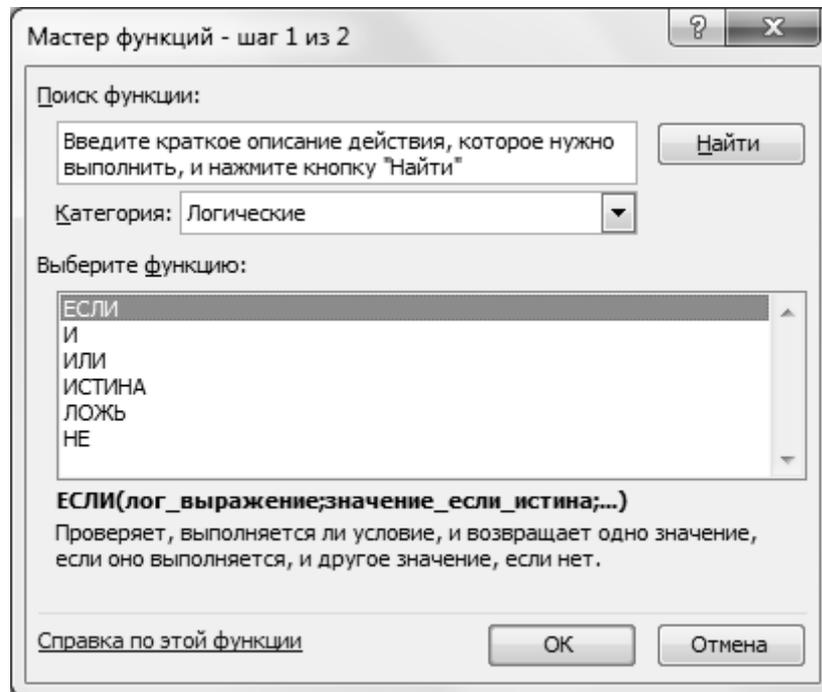
3. Заменить второй столбец в исходной матрице системы  $A$  на столбец свободных членов  $b$  и вычислить определитель  $\Delta_2$  полученной матрицы описанным выше способом.
4. Заменить третий столбец в исходной матрице системы  $A$  на столбец свободных членов  $b$  и вычислить определитель  $\Delta_3$  полученной матрицы описанным выше способом.
5. Организовать следующую проверку на существование решения системы линейных уравнений:

- если  $\Delta = 0$  и все  $\Delta_j = 0, j=1, 2, 3$ , то система имеет бесконечное множество решений;
- если  $\Delta = 0$  и  $\Delta_j \neq 0, j=1, 2, 3$ , то система не имеет решения;
- если  $\Delta \neq 0$ , то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$\text{лам: } x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Перечисленные выше условия предварительной проверки значения определителя системы и значений дополнительных определителей системы, полученных в результате замены, следует выполнить с помощью функций  $ЕСЛИ(...)$  и  $И(...)$  из категории функций *Логические*. Для этого необходимо вызвать *Мастер функций*. В

результате загрузится окно диалога *Мастер функций - шаг 1 из 2* (см. Рис.1.17), в котором в раскрывающемся списке *Категория*: выбрать категорию *Логические*.



**Рис. 1.17** Выбор функций *ЕСЛИ(...)* из категории *Логические*

Далее в списке с прокруткой *Выберите функцию*: выбрать функцию *ЕСЛИ(логич. выражение; знач. если истина; знач. если ложь)*, которая проверяет, выполняется ли указанное *логическое выражение*, и возвращает *значение если истина*, если оно выполняется, или *значение если ложь*, если указанное условие не выполняется.

- б. Для проверки выражения, состоящего из 4-х условий «и  $\Delta_1 = 0$ , и  $\Delta_2 = 0$ , и  $\Delta_3 = 0$ » в раскрывшемся окне диалога *Аргументы функции* (см. Рис. 1.18) необходимо в окне поля ввода аргумента *Лог выражение* вызвать функцию

*И (логич. значение1; логич. значение2; ...)*

из категории функций *Логические*, с помощью которой можно проверить выполнение одновременно нескольких логических выражений (см. Рис.1.19).

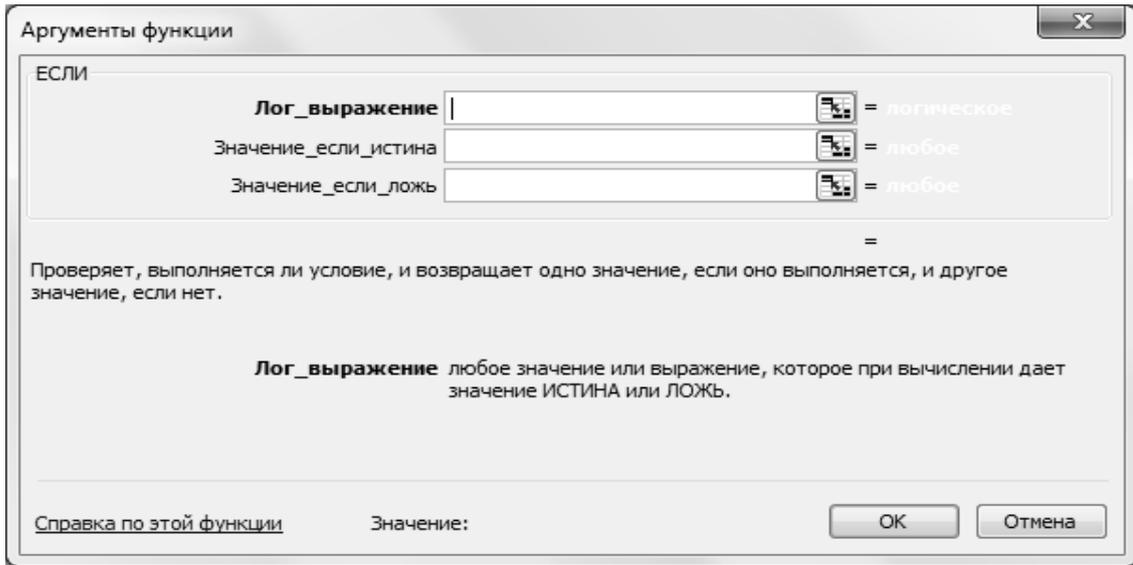


Рис. 1.18 Окно диалога *Аргументы функции ЕСЛИ(...)*

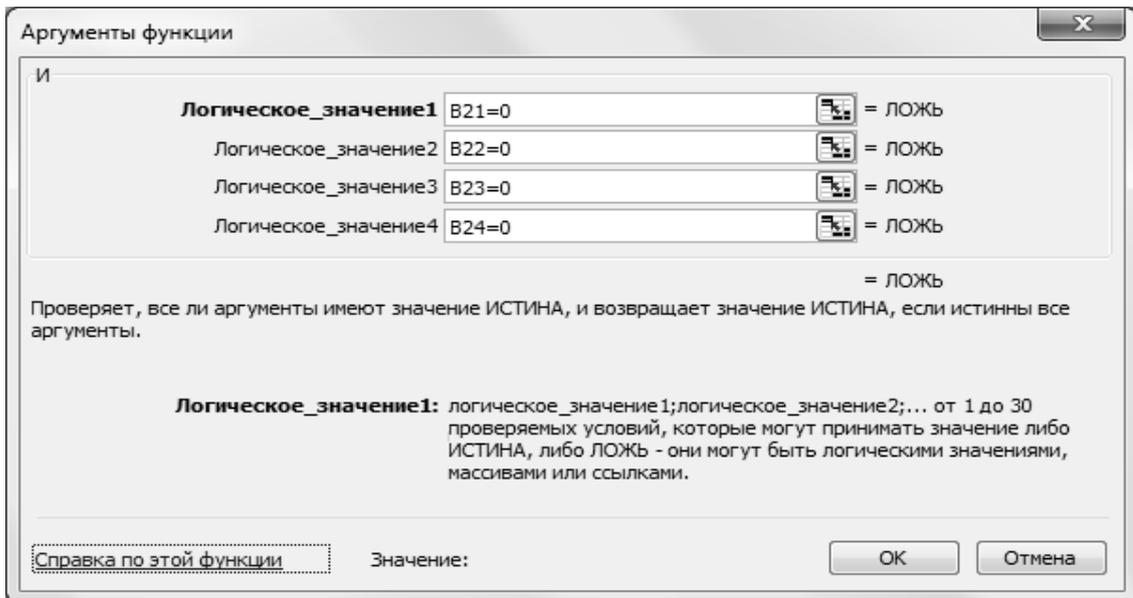
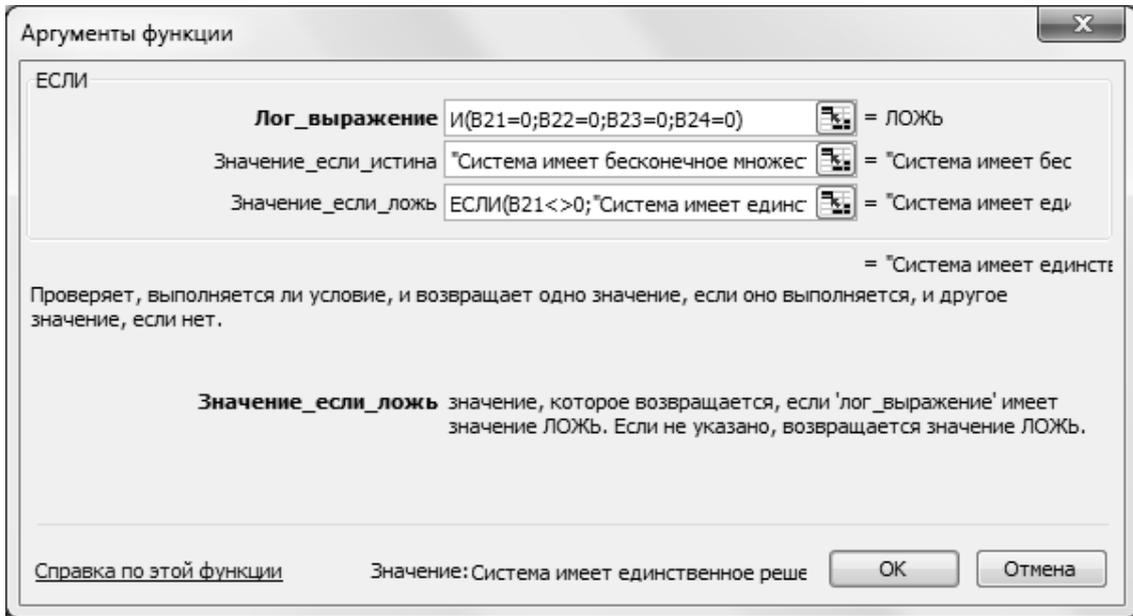


Рис. 1.19 Окно диалога *Аргументы функции И(...)*

7. После записи проверки выражений «и  $\Delta = 0$ , и  $\Delta_1 = 0$ , и  $\Delta_2 = 0$ , и  $\Delta_3 = 0$ », необходимо вернуться в *Строке формул* из функции *И(...)* к функции *ЕСЛИ(...)* и продолжить ввод оставшихся аргументов этой функции. Для чего в раскрывшемся окне диалога *Аргументы функции ЕСЛИ(...)* в окне поля ввода аргумента *Значение если истина* следует ввести сообщение «Система имеет бесконечное множество решений», а в окне поля ввода аргумента *Значение если ложь* продолжить проверку оставшихся условий существования решения системы линейных уравнений. Для этого в окне ввода аргумента *Значение если ложь* вызвать новую функцию *ЕСЛИ(...)*, у которой в окне ввода аргумента *Лог. выражение* можно ввести условие  $\Delta \neq 0$ , в окне ввода аргумента *Значение если истина* ввести

сообщение «Система имеет единственное решение», а в окне *Значение если ложь* ввести сообщение «Система не имеет решений».



**Рис. 1.20** Окно диалога *Аргументы функции ЕСЛИ(...)*

8. Далее решение системы линейных уравнений  $x_1, x_2, x_3$  вычислить по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

*Замечание:* Так как выражения для вычисления значений  $x_j$  для всех  $j=1,2,3$  однотипны, то можно записать формулу для вычисления первого значения  $x_1$ , установить абсолютную ссылку на ячейку таблицы, в которой находится значение  $\Delta$ , и далее скопировать записанную формулу в смежные ячейки таблицы с помощью маркера заполнения или через буфер обмена.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	P
105	<b>Способ 2. По правилу Крамера.</b>												
106	$A_1 =$	6	1	-1	$A_2 =$	2	6	-1	$A_3 =$	2	1	6	
107		5	-1	2		3	5	2		3	-1	5	
108		9	2	-5		4	9	-5		4	2	9	
109													
110	$\Delta =$		15										
111	$\Delta_1 =$		30		$x_1 =$	=B111/\$B\$110							
112	$\Delta_2 =$		45		$x_2 =$		3						
113	$\Delta_3 =$		15		$x_3 =$		1						
114													

**Рис. 1.21** Решение системы линейных уравнений  $x_1, x_2, x_3$

### 3. Решение системы линейных алгебраических уравнений с помощью модуля Поиск решения

Для решения системы линейных уравнений с помощью модуля Поиск решения система линейных уравнений должна быть представлена в таблице в виде отдельных уравнений системы. Для этого следует выполнить следующие шаги.

1. Ввести элементы матрицы системы  $A$  и столбца свободных членов  $b$ .

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 8 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ 46 \end{bmatrix}$$

2. Задать начальные значения элементов столбца переменных  $x$  равные нулю  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$  в виде строки переменных  $x$ .

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Записать в отдельных ячейках каждое из уравнений системы одним из следующих способов:

#### 1-й способ записи системы линейных алгебраических уравнений

Записать непосредственно в отдельные ячейки таблицы сами выражения уравнений системы:

1 уравнение системы =  $a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3$

2 уравнение системы =  $a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3$

3 уравнение системы =  $a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3$

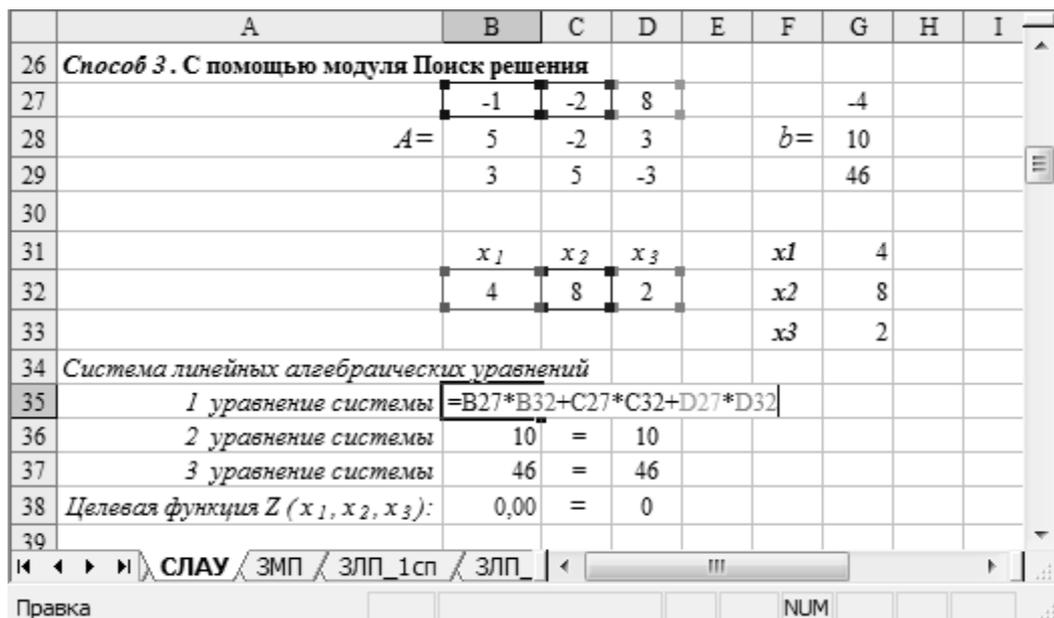


Рис. 1.22 Запись системы линейных уравнений

#### 2-й способ записи системы линейных алгебраических уравнений

Каждое из уравнений системы можно записать и в форме

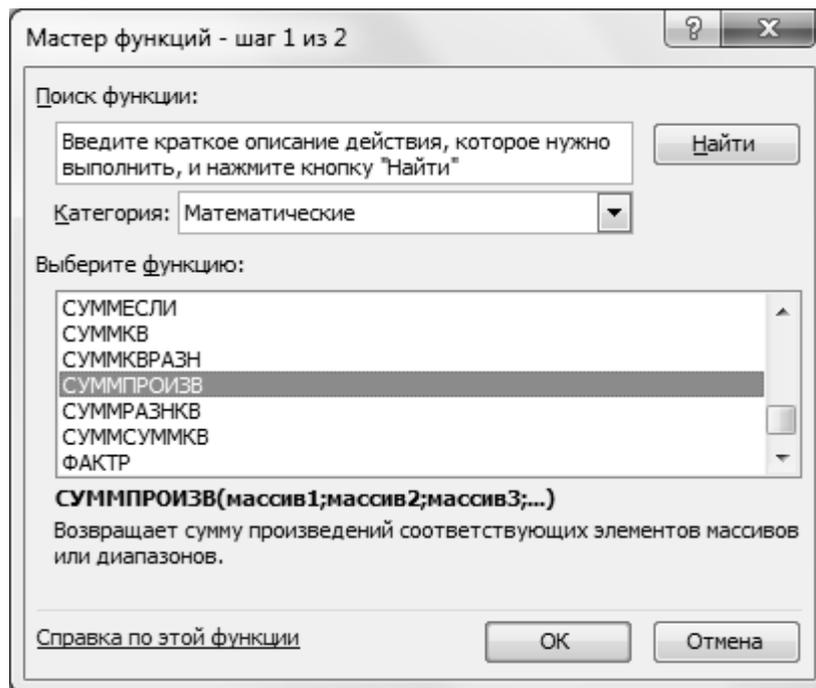
$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + a_{i3} \cdot x_3 = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \cdot x_j, \quad i = 1, 2, 3:$$

$$1 \text{ уравнение: } a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = \sum_{j=1}^3 a_{1j} \cdot x_j$$

$$2 \text{ уравнение: } a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = \sum_{j=1}^3 a_{2j} \cdot x_j$$

$$3 \text{ уравнение: } a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = \sum_{j=1}^3 a_{3j} \cdot x_j$$

Для записи каждого из уравнений системы в указанной форме в отдельные ячейки таблицы можно воспользоваться функцией *СУММПРОИЗВ(...)* из категории *Математические*, которая возвращает сумму произведений соответствующих элементов указанных массивов (см. Рис.1.23).



**Рис. 1.23** Выбор функции *СУММПРОИЗВ( )*

Уравнения системы линейных уравнений будут записаны следующим образом:

$$=СУММПРОИЗВ (a_{11}, a_{12}, a_{13}; x_1, x_2, x_3)$$

$$=СУММПРОИЗВ (a_{21}, a_{22}, a_{23}; x_1, x_2, x_3)$$

$$=СУММПРОИЗВ (a_{31}, a_{32}, a_{33}; x_1, x_2, x_3)$$

*Замечание:* Так как в каждом из уравнений системы используется одни и те же элементы строки переменных  $x$ , то второе и третье уравнения системы можно получить, если скопировать первое уравнение системы, в котором необходимо перед ко-

пированием установить абсолютную ссылку на элементы строки переменных  $x$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
26	Способ 3. С помощью модуля Поиск решения								
27		-1	-2	8			-4		
28	A=	5	-2	3		b=	10		
29		3	5	-3			46		
30									
31		$x_1$	$x_2$	$x_3$		$x1$	4		
32		4	8	2		$x2$	8		
33						$x3$	2		
34	Система линейных алгебраических уравнений								
35	1 уравнение системы	=СУММПРОИЗВ(B27:D27;\$B\$32:\$D\$32)							
36	2 уравнение системы	10	=	10					
37	3 уравнение системы	46	=	46					
38	Целевая функция $Z(x_1, x_2, x_3)$ :	0,00	=	0					
39									

**Рис. 1.24** Запись уравнений системы с помощью функции СУММПРОИЗВ(...)

4. Так как решением системы линейных уравнений называется совокупность чисел  $(x_1, x_2, x_3)$ , при подстановке которых в уравнения системы каждое из уравнений системы обращается в тождества, то для поиска этого решения необходимо решить следующую задачу:

$$Z(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j - b_i \right)^2 = 0$$

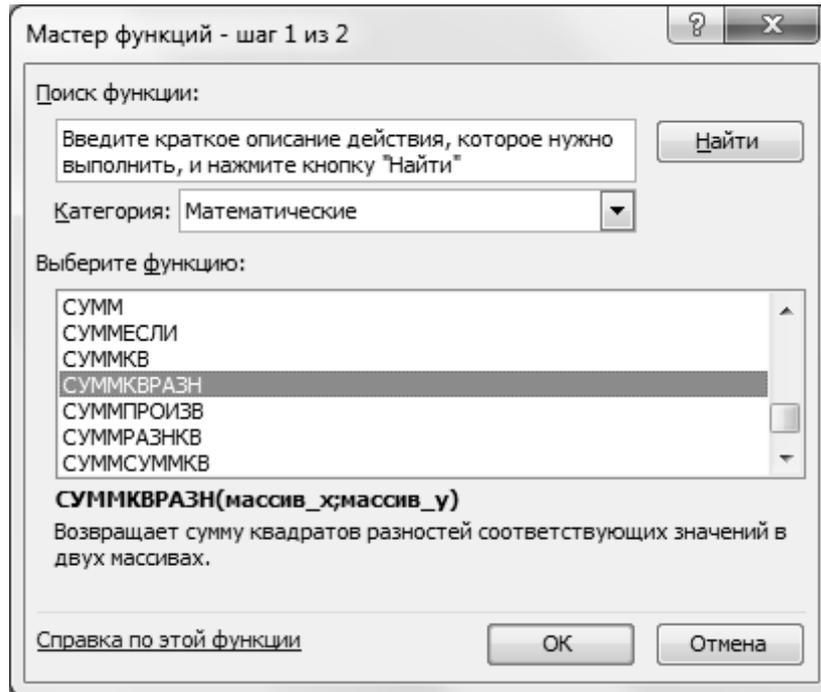
целевая функция                      массив – уравнения системы линейных уравнений                      вектор свободных членов

Для записи данного выражения необходимо вызвать *Мастер функций*. В результате загрузится окно диалога *Мастер функций – шаг 1 из 2*, в котором в раскрывающемся списке *Категория*: выбрать категорию функций *Математические*, и в списке с прокруткой *Выберите функцию*: выбрать функцию

$$\text{СУММКВРАЗН(Массив\_X; Массив\_Y),}$$

которая возвращает сумму квадратов разностей соответствующих значений элементов двух массивов (см. Рис.1.25):

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 .$$



**Рис. 1.25** Выбор функции СУММКВРАЗН(...)

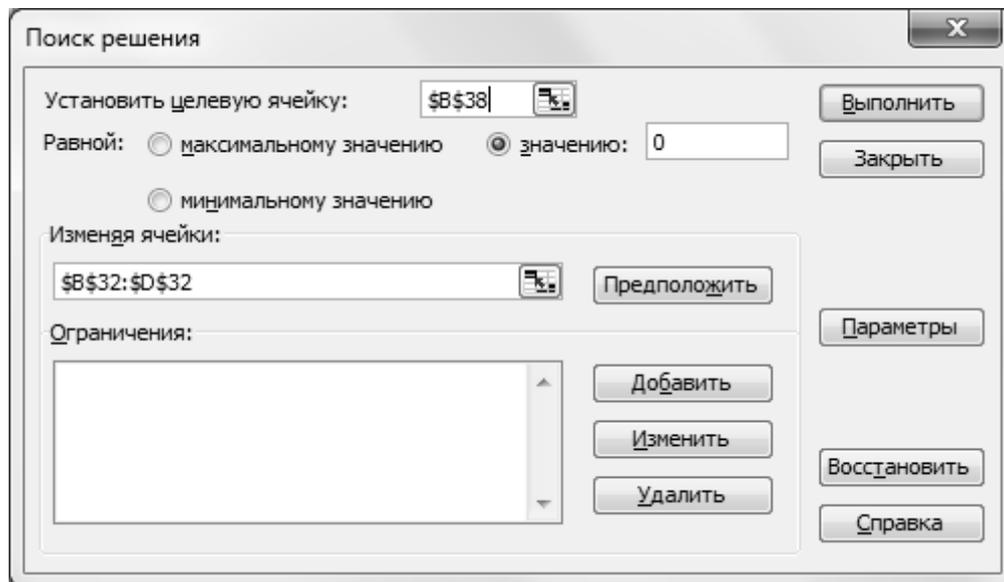
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
26	<i>Способ 3. С помощью модуля Поиск решения</i>								
27		-1	-2	8			-4		
28	<i>A=</i>	5	-2	3		<i>b=</i>	10		
29		3	5	-3			46		
30									
31		<i>x<sub>1</sub></i>	<i>x<sub>2</sub></i>	<i>x<sub>3</sub></i>		<i>x1</i>	4		
32		4	8	2		<i>x2</i>	8		
33						<i>x3</i>	2		
34	<i>Система линейных алгебраических уравнений</i>								
35	<i>1 уравнение системы</i>	-4	=	-4					
36	<i>2 уравнение системы</i>	10	=	10					
37	<i>3 уравнение системы</i>	46	=	46					
38	<i>Целевая функция Z (x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>, x<sub>3</sub>):</i>	=СУММКВРАЗН(B35:B37;D35:D37)							
39									

**Рис. 1.26** Запись целевой функции с помощью функции СУММКВРАЗН(...)

5. В раскрывшемся окне диалога *Аргументы функции* в окне поля ввода аргумента *Массив\_X* указать ссылки на ячейки таблицы, в которых находятся уравнения системы линейных уравнений, а в окне поля *Массив\_Y* – ссылки на ячейки таблицы, в которых находятся элементы столбца свободных членов *b* (см. Рис.1.26).

<i>Целевая функция Z (x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>, x<sub>3</sub>):</i>	=СУММКВРАЗН (уравнения системы; вектор свободных членов <i>b</i> )	=	0
---	--	---	---

6. Выбрать вкладку *Данные* → группу *Анализ* → кнопку *Поиск решения*. В результате загрузится окно диалога *Поиск решения*, в котором (см. Рис.1.27):
- В окне поля ввода *Установить целевую ячейку*: ввести ссылку на ячейку, содержащую описание целевой функции  $Z(x_1, x_2, x_3)$ .
  - В группе переключателей *Равной* установить переключатель  *Значению* и в окне ввода ввести значение 0.
  - В окне поля ввода *Изменяя ячейки*: ввести ссылки на ячейки, в которых находятся начальные значения строки переменных  $x_1, x_2, x_3$ .
  - Выбрать кнопку Выполнить.



**Рис. 1.27** Ввод параметров в окне диалога *Поиск решения*

Результаты поиска *Microsoft Excel* отобразит в раскрывшемся окне диалога *Результаты поиска решения*, в котором следует выбрать переключатель  *Сохранить найденное решение*, выбрать кнопку ОК или нажать клавишу *Enter* (см. Рис.1.28).

Если *Microsoft Excel* не сможет подобрать подходящего решения, то в окне диалога *Результаты поиска решения* появится соответствующее сообщение (см. Рис.1.29). В этом случае следует выбрать кнопку Отмена или нажать клавишу *Esc*, и, далее, проверить все введенные значения и на рабочем листе в таблице и в окне диалога и решить задачу заново.

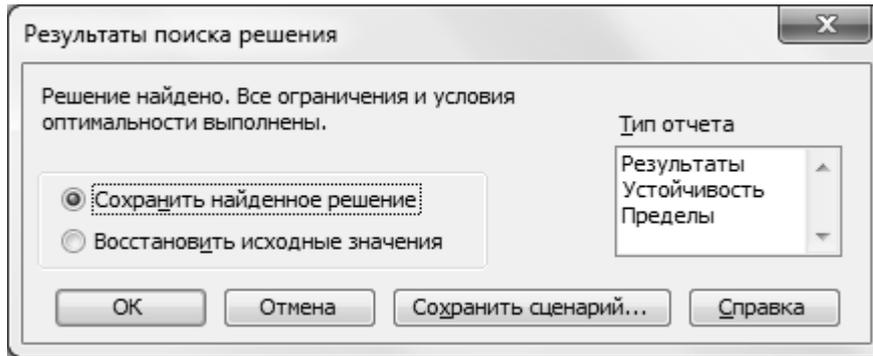


Рис. 1.28 Окно диалога *Результаты поиска решения*

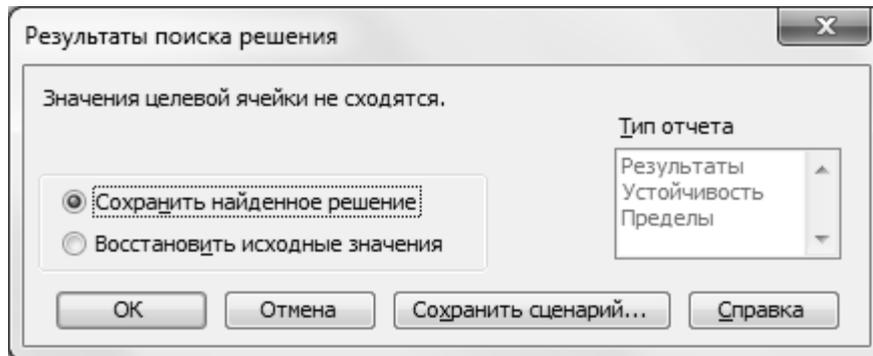


Рис. 1.29 Окно диалога *Результаты поиска решения*

*Замечание:* Так как решением системы линейных алгебраических уравнений является столбец переменных  $x$ , а в процессе решения задачи мы использовали строку переменных  $x$ , то полученные значения строки  $x$  необходимо преобразовать в столбец переменных  $x$  с помощью функции *ТРАНСП(...)* из категории *Ссылки и массивы* (см. Рис.1.30).

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 4 & 8 & 2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 8 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
26	<i>Способ 3. С помощью модуля Поиск решения</i>									
27		-1	-2	8			-4			
28	$A=$	5	-2	3		$b=$	10			
29		3	5	-3			46			
30										
31		$x_1$	$x_2$	$x_3$		$x1$	=ТРАНСП(B32:D32)			
32		4	8	2		$x2$	8			
33						$x3$	2			
34	<i>Система линейных алгебраических уравнений</i>									
35	<i>1 уравнение системы</i>		-4	=	-4					
36	<i>2 уравнение системы</i>		10	=	10					
37	<i>3 уравнение системы</i>		46	=	46					
38	<i>Целевая функция Z (x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>, x<sub>3</sub>):</i>		0,00	=	0					
39										

Матрицы\_2 \ СЛАУ \ ЗМП \ ЗЛП\_1 \ Инт

Правка NUM

Рис. 1.30 Транспонирование вектора  $x_1, x_2, x_3$

## §2. Аппроксимация функций, оценка связей и прогнозирование

### Задача аппроксимации таблично заданной функции

Пусть функция  $y = f(x)$  задана таблицей, включающей  $n$  пар значений  $(x, y)$ :

$x$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_n$

*Задача аппроксимации* (от лат. *approximo* – приближаюсь): из заданного класса функций  $L = \{g(x, a)\}$ , где  $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  – вектор параметров, требуется выбрать такую функцию  $g(x, a)$ , которая в некотором смысле близка к функции  $f(x)$ .

В зависимости от класса функций  $L$ , а также критерия близости функций, можно рассматривать различные задачи аппроксимации.

*Задача интерполяции*: функции  $y = f(x)$  и  $g(x, a)$  считаются «близкими», если

$$f(x_i) = g(x_i, a), \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

то есть  $f(x)$  и  $g(x, a)$  совпадают в точках  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , которые называются *узлами интерполяции*.

Задача интерполяции возникает в тех случаях, когда при аппроксимации обязательно необходимо учитывать табличные значения. Например, в случае, когда исходные данные носят нормативный характер или полученные эмпирические данные содержат незначительную ошибку эксперимента (выборки), или их недостаточно для применения какого-либо иного метода.

Если же ошибки в исходных данных являются существенными, то решается *Задача аналитического выравнивания* таблично заданной функции: в качестве критерия близости функций рассматривается стремление к минимуму суммы квадратов разностей значений функций в точках  $x_i, i=1, \dots, n$ .

$$S(a) = \sum_{i=1}^n (g(x_i, a) - y_i)^2 \rightarrow \min \quad (2.2)$$

Метод решения задачи (2.2) называется *методом наименьших квадратов (МНК)* или *методом Гаусса*.

### Интерполяция

Латинское слово «интерполяция» в переводе означает «вставка внутрь». То есть, вообще говоря, задача интерполяции таблично заданной функции  $y = f(x)$  – это задача

распространения, продолжения функциональной зависимости на весь диапазон изменения аргумента  $x \in [x_1, x_n]$ .

Графически интерполяция сводится к нахождению непрерывной линии (кривой или ломаной), заданной достаточно простой формулой и проходящей через табличные точки  $M_i(x_i, y_i)$ ,  $i=1, \dots, n$  (см. Рис.2.1).

В качестве функции  $g(x, a)$ , аппроксимирующей таблицу значений  $(x_i, y_i)$ ,  $i=1, \dots, n$  выберем полином  $P(x)$ .



Рис. 2.1 Интерполяция таблично заданной функции

Основанием для такого выбора является *теорема Вейерштрасса*: любая функция  $f(x)$ , непрерывная в промежутке  $(a, b)$ , может быть заменена в этом промежутке полиномом  $P(x)$ , то есть для любого  $x \in (a, b)$  и при любом  $\varepsilon > 0$  найдется такой полином  $P(x)$ , что выполняется неравенство  $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ .

Очевидно, что степень полинома не может превышать значение  $n - 1$ . При этом такой полином, график которого проходит через все таблично заданные точки, будет единственным.

Действительно, через две точки можно провести только одну прямую, однозначно заданную параметрами  $a_0$  и  $a_1$ :  $P_1(x) = a_1 x + a_0$ . Через три точки проходит кривая – парабола, однозначно определяемая тремя параметрами  $a_0, a_1, a_2$ :

$$P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \text{ и т. д.}$$

Тогда, в общем случае, через  $n$  табличных точек можно провести кривую, задаваемую полиномом степени, не выше  $n - 1$ :

$$P_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0.$$

Тогда задача интерполяции сводится к нахождению значений элементов вектора параметров  $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ .

С учетом критерия (2.1), имеет место следующая система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{n-1}x_1^{n-1} + a_{n-2}x_1^{n-2} + \dots + a_1x_1 + a_0 = y_1 \\ a_{n-1}x_2^{n-1} + a_{n-2}x_2^{n-2} + \dots + a_1x_2 + a_0 = y_2 \\ \dots \\ a_{n-1}x_n^{n-1} + a_{n-2}x_n^{n-2} + \dots + a_1x_n + a_0 = y_n \end{cases} \quad (2.3)$$

или

$$X \times a = y,$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \dots & x_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \dots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда,

$$a = X^{-1} \times y \quad (2.4)$$

Вычислив, таким образом, параметры полинома, можно выполнить вычисления значений функции  $P(x)$  для любых значений  $x \in [x_1, x_n]$ , собственно, решая задачу интерполяции, или для любых значений  $x \notin [x_1, x_n]$ , решая задачу *экстраполяции* таблично заданной функции.

На практике с использованием формулы (2.4), задачу интерполяции удобно решать с применением табличного процессора *Microsoft Excel*. Для ручных расчетов или для программирования задачи имеет смысл воспользоваться следующей записью полинома:

$$P(x) = \sum_{i=1}^n \frac{(x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_{i-1}) \cdot (x-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_i-x_1) \cdot \dots \cdot (x_i-x_{i-1}) \cdot (x_i-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i-x_n)} \cdot y_i \quad (2.5)$$

или 
$$P(x) = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}.$$

Полином (2.5) называется *интерполяционным многочленом Лагранжа*.

Очевидно, что при  $x = x_i$  многочлен принимает значение  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то есть его график проходит через все таблично заданные точки.

Формулу (2.5) можно получить, непосредственно решая систему (2.3). Рассмотрим

простейший случай, когда  $n = 2$ . Имеем 
$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ a_1 x_2 + a_0 = y_2 \end{cases}.$$

Используя правило Крамера, запишем:  $a_0 = \frac{\Delta_{a_0}}{\Delta}$ ;  $a_1 = \frac{\Delta_{a_1}}{\Delta}$ ,

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} = x_1 - x_2; \Delta_{a_0} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1; \Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} = y_1 - y_2$$

Тогда

$$a_0 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}; a_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2};$$

$$P(x) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2} = \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} \cdot y_1 + \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} \cdot y_2$$

Аналогично, для случая, когда  $n = 3$ , решая систему

$$\begin{cases} a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 = y_2 \\ a_2 x_3^2 + a_1 x_3 + a_0 = y_3 \end{cases},$$

получим следующую запись многочлена Лагранжа второй степени:

$$P(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \cdot y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \cdot y_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \cdot y_3$$

На практике интерполяция с помощью многочлена Лагранжа для  $n > 4$  применяется редко, так как в этом случае сумма становится очень чувствительной к относительно малым изменениям табличных значений  $x_i$  и  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Поэтому, результат интерполяции становится менее точным.

Чтобы обеспечить приемлемую точность, интерполяционный многочлен, построенный на основе данных всей таблицы, заменяют *кусочной функцией*. Практически поступают таким образом: разбивают таблицу на пересекающиеся подтаблицы, каждая из которых обычно содержит не более 4-х пар значений  $(x, y)$ . Каждая пара соседних подтаблиц должна иметь одну общую пару значений  $(x, y)$ . Тогда для каждой подтаблицы вычисляется свой интерполяционный многочлен, степень которого не превышает 3.

При замене интерполяционного многочлена *кусочно-линейной функцией* имеет место *линейная интерполяция*. В случае же использования для интерполяции *кусочно-нелинейной функции*, основанной на многочленах второй и выше степени, интерполяция называется *гладкой*.

Например, исходная таблица

<b>x</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
<b>y</b>	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$

разбивается на 4 подтаблицы:

<b>x</b>	$x_1$	$x_2$		$x_2$	$x_3$		$x_3$	$x_4$		$x_4$	$x_5$
<b>y</b>	$y_1$	$y_2$		$y_2$	$y_3$		$y_3$	$y_4$		$y_4$	$y_5$

для построения кусочно-линейной функции, или на 3 подтаблицы:

<b>x</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$		$x_3$	$x_4$	$x_5$		$x_5$	$x_6$	$x_7$
<b>y</b>	$y_1$	$y_2$	$y_3$		$y_3$	$y_4$	$y_5$		$y_5$	$y_6$	$y_7$

для построения кусочно-нелинейной функции, состоящей из многочленов не выше второй степени.

### ***Оценка надежности торгового автомата***

Торговая фирма планирует использовать торговый автомат для продажи мелкоштучных товаров. Надежность работы торгового автомата определяется средней продолжительностью безотказной работы устройства. Проектные значения времени безотказной работы автомата в зависимости от интенсивности обслуживания (среднего числа отпусков товара через автомат) представлены в следующей таблице:

<b>Интенсивность обслуживания</b> (количество отпусков товара в час) <b>x</b>	<b>Время безотказной работы</b> (часов) <b>f(x)</b>
10	3800
30	2400
50	900
60	400

Требуется, используя методы линейной и гладкой интерполяции, определить среднее время безотказной работы торгового автомата для заданной интенсивности обслуживания  $x = 15; 25; 40; 55$ . Используя метод гладкой интерполяции построить таблицу и график функции  $f(x)$  на отрезке  $[x_1, x_4]$  с шагом  $h = 2$ .

**Результаты вычислений:**

Интенсивность обслуживания (количество отпусков товара в час) $x$	Время безотказной работы (часов) $f(x)$	
	Линейная интерполяция	Гладкая интерполяция
15	3450	3510
25	2750	2795
40	1650	1605
55	650	617

**Выполнение задачи в Microsoft Excel**
**Метод линейной интерполяции**

1. Ввести исходные данные: таблицу значений функции и значения  $x$ , в которых необходимо посчитать значения функции  $f(x)$ . Отформатировать введенные данные.

	$x$		$f(x)$
$x_1$	10	$y_1$	3800
$x_2$	30	$y_2$	2400
$x_3$	50	$y_3$	900
$x_4$	60	$y_4$	400

$x =$	15	25	40	55
-------	----	----	----	----

2. Найти отрезок  $[x_{i-1}, x_i]$ , которому принадлежит значение  $x$ . Для это можно использовать функцию

*ПОИСКПОЗ(Искомое значение; Просматриваемый массив;  
Тип сопоставления)*

из категории *Ссылки и массивы*, которая возвращает относительную позицию в массиве элемента, соответствующего указанному значению с учетом указанного порядка:

Аргументы функции <i>ПОИСКПОЗ(...)</i>	
Искомое значение	значение $x$
Просматриваемый массив	массив $x_1, x_2, x_3, x_4$
Тип сопоставления (-1, 0, 1)	-1 – <i>Просматриваемый массив</i> упорядочен в порядке убывания 0 – <i>Просматриваемый массив</i> не упорядочен 1 – <i>Просматриваемый массив</i> упорядочен в порядке возрастания

В данном случае аргумент функции *Тип сопоставления* следует выбрать 1, так как массив исходных табличных данных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , в котором осуществляется поиск значения  $x$ , упорядочен в порядке возрастания.

3. По найденному номеру отрезка из исходной таблицы значений функции можно выбрать соответствующие табличные значения  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  и  $(x_i, y_i)$ . Для этого можно использовать функцию *ИНДЕКС(...)* из категории *Ссылки и массивы*, которая по указанному номеру строки в массиве возвращает значение из просматриваемого массива, находящееся на пересечении этой указанной строки и конкретного указанного столбца. Данная функция имеет разные списки аргументов. Следует использовать первый вариант:

*ИНДЕКС(Массив; Номер строки; Номер столбца)*

Аргументы функции <i>ИНДЕКС(...)</i>	
Массив	массив значений таблично заданной функции $x_1, x_2, x_3, x_4$ и $y_1, y_2, y_3, y_4$
Номер строки	номер отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ , которому принадлежит $x$
Номер столбца	Номер столбца в массиве значений таблично заданной функции, из которого необходимо вернуть значение: 1 – если необходимо вернуть значение $x_{i-1}$ или $x_i$ 2 – если необходимо вернуть значение $y_{i-1}$ или $y_i$

В результате расчеты в таблице будут выглядеть следующим образом:

	$x$		$f(x)$		$x$	15	25	40	55
$x_1$	10	$y_1$	3800	$N_{\text{отрезка}}$	=ПОИСКПОЗ ( $x$ ; массив $x_i$ ; 1)				
$x_2$	30	$y_2$	2400	$x_{i-1}$	=ИНДЕКС (массивы $x_i$ и $y_i$ ; $N_{\text{отрезка}}$ ; 1)				
$x_3$	50	$y_3$	900	$y_{i-1}$	=ИНДЕКС (массивы $x_i$ и $y_i$ ; $N_{\text{отрезка}}$ ; 2)				
$x_4$	60	$y_4$	400	$x_i$	=ИНДЕКС (массивы $x_i$ и $y_i$ ; $N_{\text{отрезка}} + 1$ ; 1)				
				$y_i$	=ИНДЕКС (массивы $x_i$ и $y_i$ ; $N_{\text{отрезка}} + 1$ ; 2)				
				$f(x)$	= $y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot (x - x_{i-1})$				

В случае поиска координат правого конца отрезка  $(x_i, y_i)$  в аргументе функции *Номер строки* следует к номеру отрезка прибавить единицу  $N_{\text{отрезка}} + 1$ , так как в массиве исходных данных нужно будет спуститься на одну строку вниз.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1						<i>Линейная интерполяция</i>					
2		$x$	$f(x)$			$x =$	15	25	40	55	
3	$x_1$	10	3800	$y_1$		<i>№ отрезка</i>	=ПОИСКПОЗ(G2;\$B\$3:\$B\$6;1)				
4	$x_2$	30	2400	$y_2$		$x_{i-1}$	=ИНДЕКС(\$B\$3:\$C\$6;G3;1)				
5	$x_3$	50	900	$y_3$		$y_{i-1}$	=ИНДЕКС(\$B\$3:\$C\$6;G3;2)				
6	$x_4$	60	400	$y_4$		$x_i$	=ИНДЕКС(\$B\$3:\$C\$6;G3+1;1)				
7						$y_i$	=ИНДЕКС(\$B\$3:\$C\$6;G3+1;2)				
8						$f(x) =$	=G5+(G7-G5)/(G6-G4)*(G2-G4)				
9											

**Рис. 2.2** Расчеты к методу *Линейная интерполяция*

4. Далее следует посчитать значение функции  $f(x)$  в точке  $x$ , для чего следует иско-  
 мое значение  $x$  и полученные значения координат концов отрезка  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  и  $(x_i, y_i)$   
 подставить в уравнение прямой, соединяющей две точки:

$$f(x) = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot (x - x_{i-1}).$$

### Метод гладкой интерполяции

1. Ввести исходные данные: таблицу значений функции.

	$x$		$f(x)$
$x_1$	10	$y_1$	3800
$x_2$	30	$y_2$	2400
$x_3$	50	$y_3$	900
$x_4$	60	$y_4$	400

2. Учитывая, что для любой непрерывной функции на отрезке можно приближенное  
 значение функции  $y$  в точке  $x$  заменить многочленом  $(n - 1)$ -ой степени:

$$P_3(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0,$$

то мы имеем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_3 \cdot x_1^3 + a_2 \cdot x_1^2 + a_1 \cdot x_1 + a_0 = y_1 \\ a_3 \cdot x_2^3 + a_2 \cdot x_2^2 + a_1 \cdot x_2 + a_0 = y_2 \\ a_3 \cdot x_3^3 + a_2 \cdot x_3^2 + a_1 \cdot x_3 + a_0 = y_3 \\ a_3 \cdot x_4^3 + a_2 \cdot x_4^2 + a_1 \cdot x_4 + a_0 = y_4 \end{cases},$$

которую необходимо решить относительно неизвестных  $a_3, a_2, a_1, a_0$ .

Система линейных уравнений, с учетом способа задания исходных данных, может  
 быть задана и в матричной форме записи:

$$\begin{pmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1^1 & x_1^0 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2^1 & x_2^0 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3^1 & x_3^0 \\ x_4^3 & x_4^2 & x_4^1 & x_4^0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$X \times a = y$$

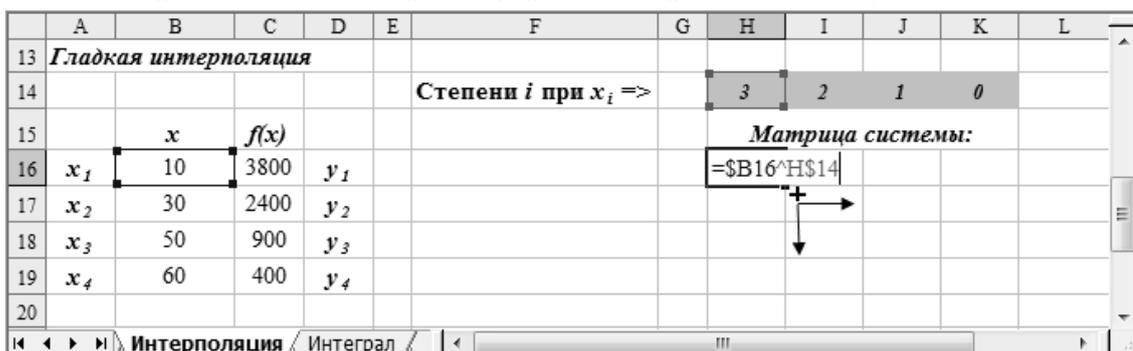
Способы решения системы линейных уравнений описаны выше, в разделе *Решение систем линейных уравнений*. Например, для решения можно использовать метод обратной матрицы:

$$a = X^{-1} \times y$$

Для этого предварительно необходимо в ячейках таблицы получить *матрицу системы*:

$$X = \begin{pmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1^1 & x_1^0 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2^1 & x_2^0 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3^1 & x_3^0 \\ x_4^3 & x_4^2 & x_4^1 & x_4^0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая определенную закономерность в получении значений элементов матрицы системы (поэтапное возведение табличных значений  $x_i$  в степень 3, 2, 1 и 0), можно предварительно ввести строку со значениями степеней  $i = 3, 2, 1, 0$ . И далее, в ячейку первого элемента матрицы системы следует ввести формулу  $= x_i \wedge i$ , которую можно будет скопировать в смежные ячейки, для получения остальных элементов матрицы системы (размер результирующей матрицы –  $4 \times 4$ ):



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
13	Гладкая интерполяция											
14								3	2	1	0	
15		x	f(x)					Матрица системы:				
16	x <sub>1</sub>	10	3800	y <sub>1</sub>				=B16^H\$14				
17	x <sub>2</sub>	30	2400	y <sub>2</sub>								
18	x <sub>3</sub>	50	900	y <sub>3</sub>								
19	x <sub>4</sub>	60	400	y <sub>4</sub>								
20												

**Рис. 2.3** Построение матрицы системы

*Замечание:* При копировании формулы элемента матрицы системы необходимо учесть различные типы адресации ячеек таблицы, а именно следует использовать смешанные ссылки, это когда зафиксирован один из адресов ячейки таблицы – либо адрес столбца \$B16, либо адрес строки G\$14 (см. Рис.2.3).

- Далее следует перейти к решению системы линейных уравнений с помощью метода обратной матрицы:

$$a = X^{-1} \times y$$

Для умножения матрицы  $X^{-1}$  на вектор  $y$  следует использовать функцию **МУМНОЖ(...)** из категории *Математические*, а для вычисления обратной матрицы следует использовать функцию **МОБР(...)** из категории *Математические*. В результате в ячейке таблицы будет записана следующая формула:

$$=МУМНОЖ(МОБР(Массив\ x_{st}); Массив\ y_i)$$

4. После выхода из *Мастера функций*, для получения результирующего массива значений коэффициентов  $a_3, a_2, a_1, a_0$  следует:

- выделить область таблицы размером 4 строки на 1 столбец;
- нажать функциональную клавишу **F2**, то есть перейти в режим редактирования ячейки таблицы;
- нажать комбинацию клавиш **Ctrl + Shift + Enter**.

В результате *Microsoft Excel* заполнит выделенный диапазон ячеек таблицы значениями элементов полученной матрицы. Следует обратить внимание на то, что выражение самой формулы будет помещено в фигурные скобки:

$$\{ =МУМНОЖ ( МОБР( Массив\ x_{st}); Массив\ y_i ) \}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
13	<b>Гладкая интерполяция</b>											
14						Степени $i$ при $x_i \Rightarrow$		3	2	1	0	
15		$x$	$f(x)$					<b>Матрица системы:</b>				
16	$x_1$	10	3800	$y_1$				1000	100	10	1	
17	$x_2$	30	2400	$y_2$				27000	900	30	1	
18	$x_3$	50	900	$y_3$				125000	2500	50	1	
19	$x_4$	60	400	$y_4$				216000	3600	60	1	
20												
21	<b>Коэффициенты многочлена</b>						$x =$	$f(x)$				
22	$a_3$	=МУМНОЖ(МОБР(Н16:К19);С16:С19)					15					
23	$a_2$					25						
24	$a_1$					40						
25	$a_0$					55						
26												

**Рис. 2.4** Вычисление значений коэффициентов  $a_3, a_2, a_1, a_0$  многочлена  $P_3(x)$

5. Далее следует ввести значения  $x=15; x=25; x=40$  и  $x=55$ , в которых необходимо вычислить значения функции  $f(x)$ .
6. Вычисление значения функции  $f(x)$  в заданных точках можно выполнить одним из следующих способов:

### 1. Запись многочлена в виде алгебраической формулы

Найденные значения коэффициентов многочлена  $a_3, a_2, a_1, a_0$  и текущее значение  $x=15$ , подставить в выражение многочлена:

$$P_3(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0.$$

Далее следует выполнить аналогичные расчеты для вычисления значений функции для других оставшихся значений  $x=25; x=40$  и  $x=55$ . Для этого можно формулу вычисления многочлена в точке  $x=15$  скопировать по смежным ячейкам вниз. Предварительно, перед копированием, в самом выражении многочлена ссылки на значения коэффициентов  $a_3, a_2, a_1, a_0$  необходимо зафиксировать (то есть изменить тип относительных ссылок на абсолютные), так как это общие коэффициенты и адреса этих ячеек при копировании формулы меняться не должны (см. Рис.2.5).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
13	<i>Гладкая интерполяция</i>												
14						Степени $i$ при $x_i \Rightarrow$		3	2	1	0		
15		$x$	$f(x)$					<i>Матрица системы:</i>					
16	$x_1$	10	3800	$y_1$				1000	100	10	1		
17	$x_2$	30	2400	$y_2$				27000	900	30	1		
18	$x_3$	50	900	$y_3$				125000	2500	50	1		
19	$x_4$	60	400	$y_4$				216000	3600	60	1		
20													
21	<i>Коэффициенты многочлена</i>						$x =$	$f(x)$					
22	$a_3$	0,019					15	= $\$B\$22*G22^3+\$B\$23*G22^2+\$B\$24*G22+\$B\$25$					
23	$a_2$	-1,850					25						
24	$a_1$	-20,917					40						
25	$a_0$	4175,000					55						
26													

Рис. 2.5 Вычисление значения многочлена  $P_3(x)$

### 2. Запись многочлена с помощью функции СУММПРОИЗВ(...)

В выражении многочлена Лагранжа значение  $x$ , в котором должно быть вычислено значение функции  $f(x)$ , поочередно возводится в степень  $i=3,2,1,0$ . Для получения значений  $x^i$  можно воспользоваться схемой получения матрицы системы, описанной выше (см. Рис.2.6).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
13	<b>Гладкая интерполяция</b>											
14						<b>Степени <math>i</math> при <math>x_i \Rightarrow</math></b>		<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	
15		<b><math>x</math></b>	<b><math>f(x)</math></b>					<b>Матрица системы:</b>				
16	$x_1$	10	3800	$y_1$				1000	100	10	1	
17	$x_2$	30	2400	$y_2$				27000	900	30	1	
18	$x_3$	50	900	$y_3$				125000	2500	50	1	
19	$x_4$	60	400	$y_4$				216000	3600	60	1	
20												
21	<b>Коэффициенты многочлена</b>					<b>Степени <math>i</math> при <math>x \Rightarrow</math></b>	<b><math>x</math></b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b><math>f(x)</math></b>
22	$a_3$	0,019					15	= \$G22^H\$21				
23	$a_2$	-1,850					25					
24	$a_1$	-20,917					40					
25	$a_0$	4175,000					55					
26												

**Рис. 2.6** Возведение значения  $x$  в степени 3, 2, 1, 0

Имеем вектор-столбец значений  $a_3, a_2, a_1, a_0$  и вектор-строку значений  $x^3, x^2, x^1, x^0$ , соответствующие элементы которых необходимо перемножить и сложить:

$$P_3(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0.$$

Для выполнения этой операции воспользуемся функцией **СУММПРОИЗВ(...)** из категории *Математические*:

$$= \text{СУММПРОИЗВ}(\text{Массив}_1; \text{Массив}_2)$$

$\swarrow$   
 $a_3, a_2, a_1, a_0$

$\searrow$   
 $x^3 \ x^2 \ x^1 \ x^0$

Прежде чем использовать эту функцию, необходимо из столбца значений  $a_3, a_2, a_1, a_0$  сделать строку значений. Для этого можно использовать функцию **ТРАНСП(...)** из категории *Ссылки и массивы*:

$$= \text{ТРАНСП}(a_3, a_2, a_1, a_0)$$

Для получения результирующей матрицы после вызова функции **ТРАНСП()**, ввода ее аргументов и выхода из *Мастера функций*, необходимо выполнить последовательность шагов, которая применяется при работе с массивами (см. Рис. 2.7):

- выделить область таблицы, начиная с той ячейки, в которой была записана функция **ТРАНСП(...)**, определяя размер результирующей матрицы (1 строка  $\times$  4 столбца);
- нажать функциональную клавишу **F2** и, войдя в режим редактирования ячейки, нажать комбинацию клавиш **Ctrl + Shift + Enter**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M		
13	<b>Гладкая интерполяция</b>														
14						<b>Степени <math>i</math> при <math>x_i \Rightarrow</math></b>				3	2	1	0		
15		<b>x</b>	<b>f(x)</b>				<b>Матрица системы:</b>								
16	$x_1$	10	3800	$y_1$			1000	100	10	1					
17	$x_2$	30	2400	$y_2$			27000	900	30	1					
18	$x_3$	50	900	$y_3$			125000	2500	50	1					
19	$x_4$	60	400	$y_4$			216000	3600	60	1					
20															
21	<b>Коэффициенты многочлена</b>					<b>Степени <math>i</math> при <math>x \Rightarrow</math></b>				<b>x</b>	3	2	1	0	<b>f(x)</b>
22	$a_3$	0,019				15	3375	225	15	1					
23	$a_2$	-1,850				25	15625	625	25	1					
24	$a_1$	-20,917				40	64000	1600	40	1					
25	$a_0$	4175,000				55	166375	3025	55	1					
26															
27							$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$					
28							=ТРАНСП(B22:B25)								
29															

**Рис. 2.7** Транспонирование столбца значений  $a_3, a_2, a_1, a_0$

В результате *Microsoft Excel* заполнит выделенный диапазон ячеек таблицы значениями элементов транспонированной матрицы. При этом выражение самой формулы будет помещено в фигурные скобки.

Для вычисления значения многочлена, можно использовать функцию *СУММПРОИЗВ(...)*. Формулу многочлена следует записать для  $x=15$  и далее скопировать ее в смежные ячейки вниз для остальных значений  $x=25$ ;  $x=40$  и  $x=55$ . Ссылки на значения коэффициентов  $a_3, a_2, a_1, a_0$  необходимо зафиксировать (изменить тип относительных ссылок на абсолютные), так как это общие коэффициенты и адреса этих ячеек при копировании формулы меняться не должны (см. Рис.2.8).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M		
13	<b>Гладкая интерполяция</b>														
14						<b>Степени <math>i</math> при <math>x_i \Rightarrow</math></b>				3	2	1	0		
15		<b>x</b>	<b>f(x)</b>				<b>Матрица системы:</b>								
16	$x_1$	10	3800	$y_1$			1000	100	10	1					
17	$x_2$	30	2400	$y_2$			27000	900	30	1					
18	$x_3$	50	900	$y_3$			125000	2500	50	1					
19	$x_4$	60	400	$y_4$			216000	3600	60	1					
20															
21	<b>Коэффициенты многочлена</b>					<b>Степени <math>i</math> при <math>x \Rightarrow</math></b>				<b>x</b>	3	2	1	0	<b>f(x)</b>
22	$a_3$	0,019				15	3375	225	15	1	=СУММПРОИЗВ(				
23	$a_2$	-1,850				25	15625	625	25	1	\$H\$28:\$K\$28;H22:K22)				
24	$a_1$	-20,917				40	64000	1600	40	1					
25	$a_0$	4175,000				55	166375	3025	55	1					
26															
27							$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$					
28							0,019	-1,850	-20,917	4175,000					

**Рис. 2.8** Вычисление значения многочлена с помощью функции *СУММПРОИЗВ(...)*

Построить таблицу значений функции на отрезке  $[x_1, x_n]$  с шагом  $h=2$ , вычисляя в каждой точке  $x_i$  значение функции  $y_i$ , используя многочлен Лагранжа.

*Замечание:* Для вычисления значений функции с помощью многочлена Лагранжа, использовать 2-й способ с помощью функции *СУММПРОИЗВ(...)* из категории *Математические*.

### Аналитическое выравнивание табличных данных

В отличие от представленного выше метода интерполяции, основанного на использовании для аппроксимации полиномов, аналитическое выравнивание предполагает использование более широкого класса функций  $L=\{g(x, a)\}$ . Как правило, для аналитического выравнивания используются элементарные функции, например:

$$y(x) = a_0 \cdot x + a_1 - \text{линейная};$$

$$y(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 - \text{квадратичная};$$

$$y(x) = \frac{a_1}{x} + a_0 - \text{гиперболическая};$$

$$y(x) = a_1 \cdot \ln x + a_0 - \text{логарифмическая};$$

$$y(x) = a_0 \cdot a_1^x - \text{показательная};$$

$$y(x) = a_0 \cdot x^{a_1} - \text{степенная и т. д.}$$

Как было указано выше, задача аналитического выравнивания таблично заданной функции заключается в том, чтобы из класса функций  $L$  на основе критерия (2.2) выбрать наиболее близкую к функции  $y = f(x)$  функцию  $y = g(x, a)$  и определить ее параметры  $a=(a_1, a_2, \dots, a_k)$ .

При этом, очевидно, что количество параметров функции  $y = g(x, a)$  должно быть не больше количества табличных пар  $(x, y)$ , то есть  $k \leq n$ . Причем, если  $k = n$ , то имеет место задача интерполяции функции  $y = f(x)$ , и график функции  $y = g(x, a)$  пройдет через все таблично заданные точки. На практике, учитывая, что исходные данные содержат ошибку выборки (наблюдения, измерения, эксперимента), аналитическое выравнивание осуществляется при условии, что  $n \gg k$ .

Аналитическое выравнивание осуществляется в три этапа.

На *первом этапе* на основе табличных данных строится график функции для визуальной оценки характера поведения функции на отрезке  $[x_1, x_n]$ . Далее из класса  $L$  выбираются наиболее подходящая для аналитического выравнивания функция  $g(x, a)$ .

На *втором этапе* с использованием *МНК* для выбранной функции осуществляется вычисление ее параметров. При этом задача (2.2) сводится к решению системы уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0, j = 1, \dots, k. \quad (2.6)$$

Система (2.6) называется *нормальной системой уравнений*.

Найденные параметры, согласно *МНК*, обеспечивают наилучшее приближение функции  $y = g(x, a)$  к таблично заданной функции  $y = f(x)$ .

Рассмотрим случай, когда для аналитического выравнивания выбирается линейная функция  $g(x, a) = a_1 \cdot x + a_0$ . Тогда, имеем:

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n (a_1 \cdot x_i + a_0 - y_i)^2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} a_1 \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot a_0 = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_0 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \quad (2.7)$$

Для решения системы (2.7) воспользуемся правилом Крамера.

Введем обозначения:

$$S_x = \sum_{i=1}^n x_i; \quad S_y = \sum_{i=1}^n y_i; \quad S_{x^2} = \sum_{i=1}^n x_i^2; \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Тогда,  $\begin{cases} S_x a_1 + n \cdot a_0 = S_y \\ S_{x^2} a_1 + S_x a_0 = S_{xy} \end{cases}$ . Имеем:  $a_0 = \frac{\Delta_{a_0}}{\Delta}; \quad a_1 = \frac{\Delta_{a_1}}{\Delta}, \quad (2.8)$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} S_x & n \\ S_{x^2} & S_x \end{vmatrix} = S_x^2 - n \cdot S_{x^2};$$

$$\Delta_{a_0} = \begin{vmatrix} S_x & S_y \\ S_{x^2} & S_{xy} \end{vmatrix} = S_x S_{xy} - S_{x^2} S_y; \quad \Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} S_y & n \\ S_{xy} & S_x \end{vmatrix} = S_x S_y - n S_{xy}.$$

Окончательно получаем:

$$a_0 = \frac{S_x S_{xy} - S_{x^2} S_y}{S_x^2 - n \cdot S_{x^2}} \quad (2.9)$$

$$a_1 = \frac{S_x S_y - n S_{xy}}{S_x^2 - n \cdot S_{x^2}}. \quad (2.10)$$

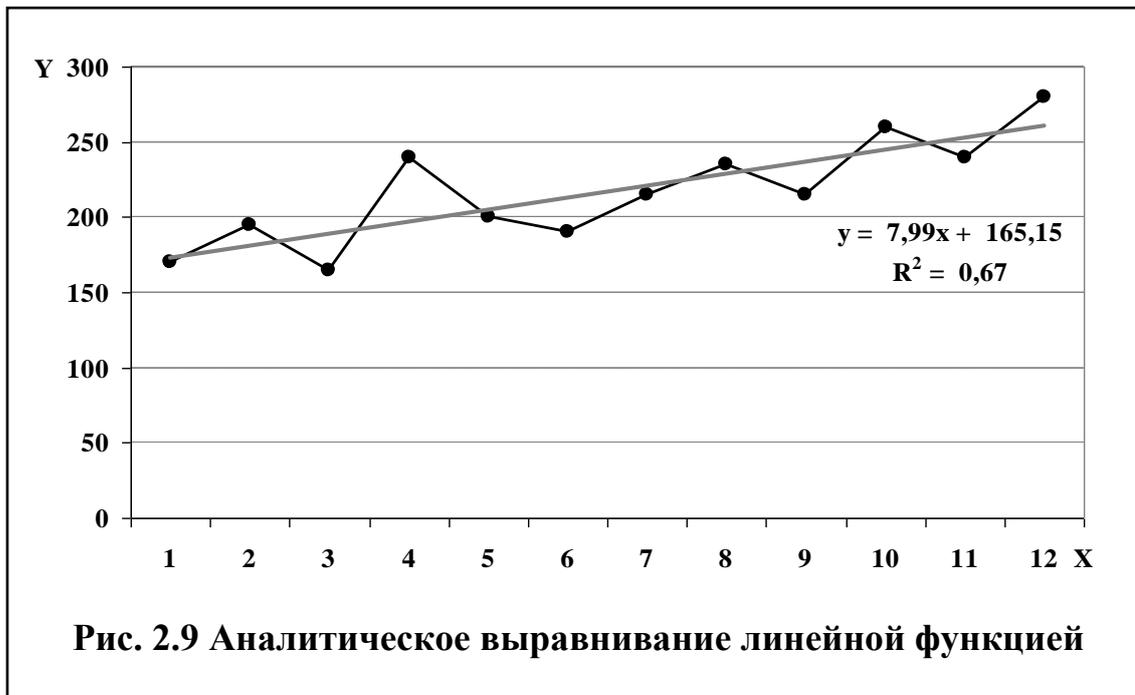
Вместо формулы (2.9) для вычисления  $a_0$  можно воспользоваться более простой формулой. Для этого разделим обе части первого уравнения системы (2.7) на  $n$ , а затем выразим  $a_0$  через  $a_1$ .

В результате получим:  $a_0 = \frac{S_y}{n} - a_1 \cdot \frac{S_x}{n}$  и  $a_0 = \bar{y} - a_1 \cdot \bar{x}$ , (2.11)

где  $\bar{x} = \frac{S_x}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $\bar{y} = \frac{S_y}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$  – средние арифметические табличных значений

соответственно величин  $x$  и  $y$ . Таким образом, полученная прямая всегда проходит через точку плоскости, с координатами  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

На рисунке 2.9 представлен пример аналитического выравнивания табличных данных линейной функцией  $y = a_1 x + a_0$ .



**Рис. 2.9 Аналитическое выравнивание линейной функцией**

При определенных условиях, налагаемых на исходные данные, формулы (2.10) и (2.11) могут использоваться и в случае нелинейной связи  $y = f(x)$ .

Например, если для аналитического выравнивания выбрана гиперболическая зависимость между  $x$  и  $y$ , то осуществляя замену переменных  $u = \frac{1}{x}$ , получаем  $y(u) = a_1 \cdot u + a_0$ . Тогда для нахождения параметров можно воспользоваться формулами (2.10) и (2.11).

В случае логарифмической зависимости выполняем замену  $u = \ln x$ , также приводящую ее к линейному виду.

Для показательной функции выполняем логарифмирование обеих частей зависимости:  $\ln y = \ln (a_0 \cdot a_1^x)$ . Тогда,  $\ln y = \ln a_0 + x \cdot \ln a_1$  и выполняя замены  $z = \ln y$ ,  $b_0 = \ln a_0$ ,  $b_1 = \ln a_1$ , получаем линейную форму  $z(x) = b_1 \cdot x + b_0$ .

Далее, вычислив по формулам (2.10) и (2.11) значения  $b_0$  и  $b_1$ , находим значения параметров  $a_0$  и  $a_1$ :  $a_0 = e^{b_0}$ ,  $a_1 = e^{b_1}$ .

Аналогично, для степенной зависимости выполняем преобразование  $\ln y = \ln(a_0 \cdot x^{a_1}) = \ln a_0 + a_1 \cdot \ln x$ , а также замены:  $z = \ln y$ ,  $u = \ln x$ ,  $b_0 = \ln a_0$ .

Получаем линейную форму зависимости  $z(u) = a_1 \cdot u + b_0$ . Подставляя в формулы (2.10) и (2.11) соответствующие значения находим  $a_1$  и  $b_0$ . Далее, значение  $a_0$  вычисляется по формуле:  $a_0 = e^{b_0}$ .

Указанные выше преобразования нелинейной зависимости к линейному виду называется *линеаризацией*.

В случае квадратичной зависимости необходимо вычислить три параметра  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ . Согласно критерий (2.2) МНК, имеем:

$$S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^n (a_2 \cdot x_i^2 + a_1 \cdot x_i + a_0 - y_i)^2 \rightarrow \min$$

Задача сводится к решению нормальной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \\ \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0 \end{cases} \begin{cases} a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot a_0 = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_0 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \end{cases}$$

Аналогично, используя правило Крамера, параметры функции можно вычислить по формулам:

$$a_0 = \frac{\Delta_{a_0}}{\Delta}; \quad a_1 = \frac{\Delta_{a_1}}{\Delta}; \quad a_2 = \frac{\Delta_{a_2}}{\Delta}.$$

На *третьем этапе* осуществляется оценка адекватности полученной зависимости  $y = g(x, a)$  табличным данным и оценка значимости найденных параметров функции  $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ . Рассмотрение методов, применяемых для оценки значимости параметров функции, выходит за рамки данного изложения. Для оценки же адекватности аналитического выравнивания можно воспользоваться критерием (2.2) или величиной *средней относительной ошибки*:

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y(x_i) - y_i}{y_i} \right|, \quad (2.12)$$

где  $y(x_i) = g(x_i, a)$ .

Полученное значение  $\varepsilon$  интерпретируется следующим образом:

**Таблица № 2.1**

Значение ошибки	Степень адекватности
$\varepsilon \leq 10 \%$	высокая
$10 \% < \varepsilon \leq 20 \%$	хорошая
$20 \% < \varepsilon \leq 50 \%$	удовлетворительная
$\varepsilon > 50 \%$	неудовлетворительная

Если на первом этапе аналитического выравнивания на основе графика невозможно однозначно определить вид зависимости  $y = g(x, a)$ , то в этом случае выбирают несколько наиболее подходящих зависимостей  $\{g(x, a)\}$ , а затем, применяя МНК, для каждой из них вычисляют значения параметров  $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ . Далее, из множества полученных функций на основе критерия (2.2) и с учетом значения  $\varepsilon$  выбирается наиболее подходящая функция  $y = g(x, a)$ .

### Корреляционный анализ

Теперь рассмотрим способы *оценки степени тесноты связи* между величинами  $x$  и  $y$ . Такая оценка необходима для обоснования целесообразности выполнения процедуры аппроксимации функции: если связь между величинами слабая или отсутствует, то, очевидно, нет смысла находить форму этой связи и исследовать полученную функцию.

Для исследования связи между величинами можно воспользоваться статистическими методами *корреляционно-регрессионного анализа*.

Задачей *регрессионного анализа* является определение вида связи между фактором  $x$  и результатом  $y$ , то есть построение *уравнения регрессии*. Задачей *корреляционного анализа* является количественная оценка наличия и степени воздействия фактора на результат.

*Регрессия* – это зависимость среднего значения (математического ожидания) какой-либо величины от другой величины или нескольких величин.

*Корреляция* – это статистическая, то есть не имеющая строго функционального характера, зависимость между величинами, при которой изменение фактора  $x$  приводит к изменению среднего значения результата  $y$ .

### Оценка степени тесноты связи между количественными показателями

В каждой таблично заданной точке  $x_i$  отклонение  $\Delta_{y_i-\bar{y}} = y_i - \bar{y}$  значения  $y_i$  от среднего значения  $\bar{y}$  складываются из отклонения  $\Delta_{y(x_i)-\bar{y}} = y(x_i) - \bar{y}$  выровненного значения  $y(x_i)$  от среднего значения  $\bar{y}$  и отклонения  $\Delta_{y_i-y(x_i)} = y_i - y(x_i)$  табличного значения  $y_i$  от выровненного значения  $y(x_i)$  ( $i=1, \dots, n$ ).

Все отклонения имеют свое очевидное объяснение: отклонение  $\Delta_{y_i-\bar{y}}$  характеризует влияние всех факторов на величину  $y$ . Действительно, если бы на величину  $y$  не оказывали влияния какие-либо факторы, то она при любых условиях имела бы постоянное значение  $\bar{y}$ .

Отклонение  $\Delta_{y(x_i)-\bar{y}}$  связано с влиянием на величину  $y$  изучаемого в данном случае фактора – величины  $x$ .

Отклонение  $\Delta_{y_i-y(x_i)}$  характеризует влияние прочих факторов – величин, воздействие которых в данном случае никак не отражено в формуле  $y(x) = g(x, a)$ .

Возведем в квадрат отклонения и просуммируем полученные значения по всем таблично заданным точкам  $i=1, \dots, n$ :

$$S_T = \sum_{i=1}^n \Delta_{y_i-\bar{y}}^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2;$$

$$S_F = \sum_{i=1}^n \Delta_{y(x_i)-\bar{y}}^2 = \sum_{i=1}^n (y(x_i) - \bar{y})^2;$$

$$S_R = S(a) = \sum_{i=1}^n \Delta_{y_i-y(x_i)}^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - y(x_i))^2.$$

Данные суммы называются, соответственно, *общей, факторной* и *остаточной*.

Возведение в квадрат значений отклонений позволяет:

- не учитывать знак отклонения;
- нивелировать влияние на результат незначительных отклонений;
- усилить влияние на результат существенных отклонений.

Можно обратить внимание на то, что с точки зрения *МНК*, в качестве критерия используется величина  $S_R$ , которую необходимо минимизировать, то есть подобрать такую функцию  $g(x, a)$ , которая обеспечивала бы максимальное влияние на величину  $y$  именно величины  $x$ , и при этом нивелировала бы влияние других величин.

Средние значения указанных величин называются соответственно *общей, факторной и остаточной дисперсиями*:

$$D_T = \frac{S_T}{n}; \quad D_F = \frac{S_F}{n}; \quad D_R = \frac{S_R}{n}.$$

*Дисперсия* является мерой рассеяния одной величины относительно другой: чем больше дисперсия, тем больше различий между величинами.

Формулу дисперсии, например, характеризующей отклонение отдельных значений  $y_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) величины  $y$  от их среднего значения  $\bar{y}$ , можно преобразовать следующим образом:

$$D_T = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 = \frac{S_{y^2}}{n} - \left( \frac{S_y}{n} \right)^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2$$

Дисперсия является безразмерной величиной, поэтому обычно пользуются более понятной для оценки, размерной величиной *среднеквадратического* или *стандартного отклонения*  $\sigma_x$ , которое вычисляется как корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}.$$

Далее, рассмотрим систему двух взаимосвязанных величин  $x$  и  $y$ . Среднее значение суммы произведений отклонений значений этих величин от соответствующих средних значений называется *ковариацией* (*корреляционным моментом*):

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right) = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\text{cov}(x, x) = D_x.$$

*Ковариация* характеризует тесноту связи между величинами  $x$  и  $y$ : чем больше значение коэффициента ковариации, тем теснее связь между  $x$  и  $y$ . В то же время близость к нулю коэффициента ковариации еще не означает отсутствие связи между величинами, так как коэффициент имеет смысл только в случае линейной связи.

Преобразуем выражение (2.10):

$$a_1 = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{n \cdot S_{x^2} - S_x^2} = \frac{\frac{S_{xy}}{n} - \frac{S_x S_y}{n^2}}{\frac{S_{x^2}}{n} - \frac{S_x^2}{n^2}} = \frac{\text{cov}(x, y)}{D_x}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
 D_R &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_1 x_i + a_0 - y_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_1 x_i + \bar{y} - a_1 \bar{x} - y_i)^2 = \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_1 (x_i - \bar{x}) - (y_i - \bar{y}))^2 = a_1^2 D_x - 2a_1 \text{cov}(x, y) + D_T = \\
 &= a_1^2 D_x - 2a_1^2 D_x + D_T = D_T - a_1^2 D_x
 \end{aligned}$$

Тогда,  $D_T = a_1^2 \cdot D_x + D_R$ .

Далее, имеем:

$$D_F = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y(x_i) - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_1 x_i + \bar{y} - a_1 \bar{x} - \bar{y})^2 = \frac{a_1^2}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = a_1^2 D_x$$

В результате приходим к равенству:  $D_T = D_F + D_R$ , (2.13)

которое определяет *правило сложения дисперсий*.

Далее, разделим обе части равенства (2.13) на  $D_T$ :  $\frac{D_F}{D_T} + \frac{D_R}{D_T} = 1$ .

Отношение  $R^2 = \frac{D_F}{D_T} = 1 - \frac{D_R}{D_T}$  (2.14)

называется *коэффициентом детерминации*.

*Коэффициент детерминации* показывает, какая доля общей дисперсии приходится на факторную дисперсию, то есть характеризует степень влияния величины  $x$  на величину  $y$ : чем ближе  $R^2$  к 1, тем теснее связь между  $x$  и  $y$ . Значение показателя  $R^2$  может быть выражено как в долях единицы, так и в процентах.

Коэффициент детерминации, также, используется для оценки адекватности выбранной для аналитического выравнивания функции  $g(x, a)$  (см. Рис.2.9).

Имеют место следующие соотношения:  $D_F = R^2 \cdot D_T$ ,  $D_R = (1 - R^2) \cdot D_T$ .

Другим показателем, характеризующим влияние фактора  $x$  на результат  $y$  применяется *корреляционное отношение*  $\eta$ , которое представляет собой корень квадратный из коэффициента детерминации:

$$\eta = \sqrt{R^2} = \sqrt{\frac{D_F}{D_T}} = \sqrt{1 - \frac{D_R}{D_T}}. \quad (2.15)$$

*Корреляционное отношение*  $\eta$  изменяется в пределах от 0 до 1. Чем ближе  $\eta$  к 1, тем сильнее влияние изучаемого фактора на результат. Если же корреляционное отношение стремится к нулю, то влияние фактора незначительно, а вариация результата вызвана прочими факторами.

Для качественной оценки влияния фактора на результат можно воспользоваться Таблицей № 2.2, которая называется *таблицей Чеддока*.

**Таблица № 2.2**

Значения $\eta,  r_{y/x} $	Характеристика тесноты связи
< 0,3	слабая /отсутствует
[0,3 ; 0,5)	умеренная
[0,5 ; 0,7)	заметная
[0,7 ; 0,9)	высокая
[0,9 ; 1,0)	сильная
1,0	функциональная

Таким образом, степень тесноты связи между величинами  $x$  и  $y$  может считаться высокой, а выбранная функция  $g(x, a)$  – адекватным аналитическим выравниванием табличных значений, если доля влияния фактора будет составлять не менее  $R^2 = 0,7^2 = 49\%$ .

В качестве величины, характеризующей не только степень тесноты, но и направление *линейной связи* между  $x$  и  $y$ , используют *коэффициент корреляции Пирсона*:

$$r_{y/x} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (2.16)$$

Значение *коэффициента корреляции* меняется в пределах от -1 до +1. Причем, равенство  $r_{y/x} = 1$  ( $r_{y/x} = -1$ ) будет означать *функциональную прямую (обратную) линейную связь между  $x$  и  $y$* . В остальных случаях можно говорить о приближенной линейной связи между величинами.

Близость значения коэффициента корреляции к нулю означает отсутствию линейной связи между  $x$  и  $y$ . Как и в случае с ковариацией при этом может иметь место нелинейная связь между величинами.

Для качественной интерпретации значений  $r_{y/x}$  пользуются *таблицей Чеддока*.

### **Оценка влияния качественного фактора на количественный результат**

Пусть фактор  $x$  является качественным показателем, принимающий  $n$  различных значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , которые можно каким-либо способом упорядочить, например, пронумеровать. Пусть, также, результат  $y$  является количественным показателем, и зависимость  $y = f(x)$  можно задать следующей *корреляционной таблицей*:

<b>x</b>	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
<b>y</b>	$y_{11}$	$y_{12}$	...	$y_{1n}$
	$y_{21}$	$y_{22}$	...	$y_{2n}$
	...	...	...	...
	$y_{m1}$	$y_{m2}$	...	$y_{mn}$

Тогда *корреляционный (дисперсионный) анализ*, основанный на правиле сложения дисперсий, осуществляется следующим образом:

1. Вычисляем значения *групповых средних*;  $\bar{y}_j = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m y_{ij}, j = 1, 2, \dots, n$ . При этом количество чисел в каждой  $j$ -ой группе может быть, вообще говоря, различным.
2. Вычисляем значение *общей средней*;  $\bar{y} = \frac{1}{nm} \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m y_{ij}$ .
3. Вычисляем значение *межгрупповой факторной дисперсии*, характеризующей влияние фактора  $x$  на результат  $y$ :  $D_F = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\bar{y}_j - \bar{y})^2$ .
4. Вычисляем значение *общей дисперсии*, характеризующей влияние всех факторов на результат  $y$ :  $D_T = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2$ .
5. Тогда степень воздействия качественного фактора  $x$  на количественный результат  $y$  можно оценить с помощью коэффициента детерминации  $R^2 = \frac{D_F}{D_T}$  или корреляционного отношения  $\eta = \sqrt{R^2}$ .

### Оценка степени тесноты связи между качественными показателями

Пусть  $x$  и  $y$  – качественные показатели (случайные величины).

Введем следующие обозначения:

$n$  – число всевозможных вариантов признака  $x$  ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ),

$m$  – число всевозможных вариантов признака  $y$  ( $y_1, y_2, \dots, y_m$ ).

$f_{ij}$  – частота, с которой величина  $y = y_i$ , а  $x = x_j, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ .

1. Построим *таблицу сопряженности*  $x$  и  $y$ :

<b>x \ y</b>	<b>x</b>	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	$\Sigma x$
$y_1$		$f_{11}$	$f_{12}$	...	$f_{1n}$	$F_{Y1}$
$y_2$		$f_{21}$	$f_{22}$	...	$f_{2n}$	$F_{Y2}$
...		...	...	...	...	...

y \ x	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	$\Sigma x$
$y_m$	$f_{m1}$	$f_{m2}$	...	$f_{mn}$	$F_{Ym}$
$\Sigma y$	$F_{X1}$	$F_{X2}$	...	$F_{Xn}$	$F$

2. Вычисляем итоговые суммы частот по строкам, по столбцам и в целом:

$$F_{Yi} = \sum_{j=1}^n f_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad F_{Xj} = \sum_{i=1}^m f_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad F = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n f_{ij} \right).$$

3. Вычисляем значение *показателя взаимной сопряженности*:

$$\varphi^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{f_{ij}^2}{F_{Yi} \cdot F_{Xj}} - 1,$$

который характеризует степень расхождения между фактическим числом наблюдений и теоретически возможным при полном отсутствии связи.

4. Вычисляем значения

- *коэффициента взаимной сопряженности Пирсона*:

$$K_{\Pi} = \sqrt{\frac{\varphi^2}{\varphi^2 + 1}}.$$

- *коэффициента взаимной сопряженности Чупрова*:

$$K_{\text{Ч}} = \sqrt{\frac{\varphi^2}{\sqrt{(m-1) \cdot (n-1)}}}.$$

*Коэффициенты взаимной сопряженности Пирсона и Чупрова* позволяют оценить степень связи между показателями.  $K_{\text{Ч}}$  и  $K_{\Pi}$  изменяются в пределах от 0 до 1. Чем ближе к 1 значение этих коэффициентов, тем теснее связь между признаками. При этом коэффициент Чупрова дает более осторожную оценку тесноты связи, так как учитывает, также, и количество значений по каждому из признаков. При  $K_{\text{Ч}} > 0,3$  можно говорить о заметной связи между изучаемыми признаками. Для качественной оценки характера связи между качественными признаками можно воспользоваться *таблицей Чеддока*.

### Оценка влияния доходов потребителей на объем покупок

В процессе исследования спроса на товар изучается влияние на его величину среднего дохода потребителей в расчете на одного члена семьи (см. таблицу).

Доход в расчете на одного члена семьи	Объем покупок товара за период в семьях с различными доходами		
	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1000	29	35	20
1250	24	70	45
1500	26	105	73
1750	17	100	146
2000	15	85	192
2250	9	40	255
2500	4	15	354

Требуется:

1. На основе табличных данных построить график, отражающий зависимость спроса от доходов потребителей.
2. Используя метод наименьших квадратов выбрать наиболее подходящую аналитическую зависимость  $y=f(x)$  и проверить ее на адекватность фактическим данным с помощью показателя средней относительной ошибки прогнозирования.
3. Для оценки степени тесноты связи между изучаемыми величинами следует вычислить корреляционное отношение и коэффициент корреляции Пирсона.

#### Результаты вычислений по варианту №1:

Зависимость линейная $y(x)=a_0 x + a_1$				
Ошибка прогнозирования $\varepsilon$	11%	Точность хорошая	$a_0 =$	-0,02
Коэффициент корреляции $r$	-0,97	Связь обратная, сильная	$a_1 =$	46,71
Корреляционное отношение $\eta$	0,97	Связь сильная	$S =$	26,86

#### Выполнение задачи в Microsoft Excel

Для вычисления значений показателей используются функции:

- средний доход и средний объем покупок – функция  $CPЗНАЧ(...)$  из категории *Статистические*;
- среднеквадратическое отклонение – функция  $СТАНДОТКЛОНП(...)$  из категории *Статистические*;
- коэффициент корреляции – функция  $КОРРЕЛ(...)$  из категории *Статистические*;

- интерпретация значений средней относительной ошибки прогнозирования, коэффициента корреляции Пирсона, корреляционного отношения – функция  $ЕС-ЛИ(...)$  из категории *Логические* и функция  $ABS( )$  из категории *Математические*.

### Оценка влияния фактора территории на объем продаж

Торговая фирма осуществляет реализацию товара на пяти территориях продаж. В таблице приведены данные об объемах продаж товара на территориях в течение восьми недель.

Номер недели	Территории продаж				
	1	2	3	4	5
1	20	19	15	18	18
2	16	14	18	21	19
3	17	12	19	19	24
4	16	15	13	17	17
5	15	14	17	20	16
6	19	17	15	18	19
7	21	15	16	22	18
8	18	16	19	19	19

Используя метод дисперсионного анализа оценить влияние фактора территории (потребительских предпочтений покупателей, квалификации и качества работы торговых агентов и т. д.) на объем продаж.

#### Результаты вычислений:

Показатели	Территории продаж				
	1	2	3	4	5
Среднее значение	17,75	15,25	16,5	19,25	18,75
Общее среднее	17,50				
Общая дисперсия	6,00				
Факторная дисперсия	2,15				
Коррел. отношение $\eta$	0,60	Связь заметная			

#### Выполнение задачи в Microsoft Excel

Для вычисления значений показателей используются функции:

- среднее значение и общее среднее – функция  $СРЗНАЧ(...)$  из категории *Статистические*;
- общая дисперсия и факторная дисперсия – функция  $ДИСПР(...)$  из категории *Статистические*;

- корреляционное отношение – функция *КОРЕНЬ(...)* из категории *Математические*;
- интерпретация полученного значения корреляционного отношения – функция *ЕСЛИ(...)* из категории *Логические*.

### **Оценка влияния возраста покупателей на частоту покупок**

В ходе изучения спроса на товар исследуется влияние возраста покупателей на частоту покупок товара. В таблице приведены результаты опроса покупателей в торговом зале. Всего было опрошено 450 человек.

Требуется измерить тесноту связи между рассматриваемыми величинами с целью определения целесообразности сегментирования рынка потребителей товара по признаку возраста покупателей.

Частота покупок	Возраст покупателей						Всего
	до 18 лет	18 - 25	26 - 35	36 - 45	46 - 55	более 55 лет	
Постоянно	0	2	41	46	1	0	<b>90</b>
Часто	1	5	28	25	13	3	<b>75</b>
Иногда	3	7	8	5	26	14	<b>63</b>
Никогда	71	63	1	0	36	51	<b>222</b>
<b>Всего</b>	<b>75</b>	<b>77</b>	<b>78</b>	<b>76</b>	<b>76</b>	<b>68</b>	<b>450</b>

#### **Результаты вычислений:**

Показатель взаимной сопряженности $\phi^2 =$	0,83	
Коэффициент Пирсона $K_{\text{п}} =$	0,67	
Коэффициент Чупрова $K_{\text{ч}} =$	0,46	Связь заметная

#### **Выполнение задачи в Microsoft Excel**

Для вычисления значений показателей используются функции:

- итоговые значения качественных признаков  $x$  и  $y$  – функция *СУММ(...)* из категории *Математические*;
- коэффициент взаимной сопряженности Пирсона и Чупрова – функция *КОРЕНЬ(...)* из категории *Математические*;
- качественная интерпретация полученных значений коэффициентов – функция *ЕСЛИ(...)* из категории *Логические*.

## Анализ рядов динамики и прогнозирование

Как правило, задача аппроксимации функции решается совместно с задачей прогнозирования состояния объекта управления. Основой для прогнозирования является статистический анализ рядов динамики.

Статистические ряды, представляющие изменение величин во времени называются *рядами динамики* или *временными рядами*.

Ряды динамики, уровни которых характеризуют изменение величин за какие-либо периоды времени, называются *интервальными*. Ряды динамики, уровни которых характеризуют изменение величин по состоянию на какие-либо моменты времени, называются *моментными*.

Анализ рядов динамики осуществляется на основе *абсолютных* и *относительных* показателей. При сопоставлении уровней всех членов ряда динамики с одним, взятым за базу сравнения, получаются ряды динамики с постоянной базой сравнения – *базисные ряды динамики*. При сопоставлении величины уровня каждого члена ряда динамики с величиной уровня предыдущего члена получаются ряды динамики с переменной базой сравнения – *цепные ряды динамики*.

В процессе *корреляционно-регрессионного анализа рядов динамики*, исследуется зависимость значений показателя состояния объекта управления от времени, а задача регрессионного анализа сводится к определению тренда. *Тренд* – линия, отражающая основную тенденцию изменения изучаемой величины.

Рассмотрим основные показатели динамики и методы совместного решения задач аппроксимации функции и прогнозирования на практических примерах.

### Оценка выполнения обязательств по поставкам товара

Предприятие оптовой торговли осуществляет поставки товара трем розничным торговым фирмам. В таблице приведены данные об объемах еженедельных заказов и фактических поставках товара фирмам за последние 10 недель.

Неделя	Альфа		Дельта		Сигма	
	заказ	факт	заказ	факт	заказ	факт
<b>1</b>	150	150	230	230	120	120
<b>2</b>	170	165	240	240	120	120
<b>3</b>	200	185	180	175	130	120
<b>4</b>	180	200	200	180	120	130
<b>5</b>	180	180	210	180	120	120

Неделя	Альфа		Дельта		Сигма	
	заказ	факт	заказ	факт	заказ	факт
<b>6</b>	140	140	200	200	125	125
<b>7</b>	160	150	200	230	130	120
<b>8</b>	150	140	190	190	130	120
<b>9</b>	180	200	200	185	130	150
<b>10</b>	170	170	210	250	125	125

Провести оценку выполнения договорных обязательств с розничными фирмами по поставкам товара. Рассчитать основные статистические характеристики объемов поставок за период:

- суммарные объемы поставок;
- средние объемы поставок;
- среднеквадратические отклонения объемов поставок;
- вариацию объемов поставок;
- коэффициент равномерности поставок;
- коэффициент ритмичности поставок.

По табличным данным построить графики, отражающие динамику заказов и поставок товаров для каждой из розничных торговых фирм.

### Обозначения и используемые для расчетов формулы

$T$  – количество недель;

$X_{\text{заказ } t}$  – объемы заказов за период времени  $t$ ,  $t=1, 2, \dots, T$ ;

$X_{\text{факт } t}$  – объемы поставок за период времени  $t$ ,  $t=1, 2, \dots, T$ ;

$X = \sum_{t=1}^T X_t$  – суммарные объемы поставок за период  $T$ ;

$\bar{X} = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T X_t$  – средние объемы поставок за период  $T$ ;

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2}{T}}$  – среднеквадратические отклонения объемов поставок за период  $T$ ;

$V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \cdot 100\%$  – вариация объемов поставок за период  $T$ . Данный показатель характеризует степень равномерности поставок. *Равномерность поставок* – это поступление товаров равными партиями через равные промежутки времени.

Обратный к вариации показатель:  $K_{равн} = 100\% - V$  – коэффициент равномерности. Чем меньше вариация, тем равномернее осуществляются поставки.

$$K_{ар} = \sum_{t=1}^T \left| 1 - \frac{X_{факт\ t}}{X_{заказ\ t}} \right| - \text{коэффициент аритмичности поставок.}$$

Данный показатель характеризует степень ритмичности поставок. *Ритмичность поставок* – это соблюдение сроков и размеров поставок, оговоренных контрактом. Чем ближе  $K_{ар}$  к 0, тем ритмичнее осуществляются поставки.

### Выполнение задачи в *Microsoft Excel*

Для форматирования введенных данных и рассчитанных показателей можно:

- или выбрать вкладку *Главная* → группу *Шрифт* / группу *Выравнивание* / группу *Число* и далее нужные кнопки в группе;
- или раскрыть группу *Шрифт* / группу *Выравнивание* / группу *Число* на вкладке *Главная* и далее в раскрывшемся окне диалога *Формат ячеек* выбрать соответствующие вкладки окна диалога *Число* / *Выравнивание* / *Шрифт* / *Граница* / *Заливка*;
- или в контекстном меню к выделенному диапазону ячеек выбрать команду *Формат ячеек...* и далее в раскрывшемся окне диалога *Формат ячеек* выбрать соответствующие вкладки окна диалога *Число* / *Выравнивание* / *Шрифт* / *Граница* / *Заливка*;
- или при вызове контекстного меню к выделенному диапазону ячеек во всплывающей панели кнопок выбрать нужные кнопки для форматирования данных.

Для форматирования ячеек таблицы, которые удовлетворяют какому-либо условию, можно использовать *Условное форматирование*. Для этого следует выбрать вкладку *Главная* → группу *Стили* → раскрыть список команд у кнопки Условное форматирование ▼ и далее в списке команд можно выбрать:

- или команду *Правила выделения ячеек*, с помощью которой можно задать одно из условий для форматирования ячеек - *Больше...* ; *Меньше...* ; *Между...* ; *Равно...* ; *Текст содержит...* ; *Дата...* ; *Повторяющиеся значения...* ; *Другие правила...* .
- или команду *Правила отбора первых и последних значений*, с помощью которой можно задать одно из условий для форматирования ячеек – *10 первых элементов...* , *Первые 10%...* , *10 последних элементов...* , *Последние 10%...* , *Выше среднего...* , *Ниже среднего...* , *Другие правила....*
- или команду *Создать правило...* ;

- или команду *Гистограммы*;
- или команду *Цветовые шкалы*;
- или команду *Наборы значков*.

Копирование формул в таблице можно выполнять с помощью маркера заполнения по смежным ячейкам таблицы.

Для вычисления вышеуказанных статистических показателей можно использовать следующие функции:

- суммарный объем – функция *СУММ(...)* из категории *Математические*;
- среднее значение объема – функция *СРЗНАЧ(...)* из категории *Статистические*;
- среднеквадратическое отклонение – функция *СТАНДОТКЛОНП(...)* из категории *Статистические*;
- коэффициент аритмичности поставок – функции *СУММ(...)* и *ABS(...)* из категории *Математические*.

Для вычисления коэффициента аритмичности поставок можно использовать следующую схему обработки значений числовой последовательности:

- записать в ячейку формулу в следующем виде:

$$=СУММ ( ABS(1 - массив X_{факт t} / массив X_{факт t} ) )$$

- выход из формулы осуществить с помощью нажатия комбинации управляющих клавиш *Ctrl + Shift + Enter*. В результате будет вычислено значение коэффициента и выражение формулы в *Строке формул* будет взято в фигурные скобки *{=формула}*.

Для построения диаграммы нужно выделить диапазон ячеек с исходными данными, выбрать вкладку *Вставка* → группу *Диаграммы* и далее выбрать нужный тип диаграммы. Для форматирования и редактирования отдельных элементов области диаграммы нужно использовать функционал вкладок *Макет*, *Конструктор* и *Формат*.

### **Оценка влияния факторов на динамику выручки**

Основу товарного ассортимента предприятия розничной торговли составляют 15 наименований товаров. В таблице ниже приведены данные об объеме выручки  $x$  и физическом объеме продаж  $q$  данных товаров за сопоставимые базисный (0) и текущий (1) периоды.

Товары	Выручка $x$ (у.е.)		Объем продаж $q$ (ед.)	
	Базисный период	Текущий период	Базисный период	Текущий период
<b>1</b>	1575	1344	105	84
<b>2</b>	1794	1587	78	69
<b>3</b>	1121	1113	59	53
<b>4</b>	3330	4080	74	102
<b>5</b>	4824	5016	67	66
<b>6</b>	864	1225	16	25
<b>7</b>	1152	1179	128	131
<b>8</b>	308	360	22	20
<b>9</b>	928	1025	32	41
<b>10</b>	1548	1470	36	30
<b>11</b>	448	400	28	25
<b>12</b>	1691	1089	19	11
<b>13</b>	1950	1360	25	17
<b>14</b>	3298	4272	34	48
<b>15</b>	1376	1508	43	52

Требуется провести факторный анализ динамики выручки. Для этого необходимо вычислить:

- индивидуальные индексы показателей по каждому из товаров;
- индивидуальные и агрегатный индексы (абсолютные приросты) объема выручки;
- индивидуальные и агрегатные индексы (абсолютные приросты) объема выручки за счет изменения цен и физического объема продаж.

Обозначения и формулы, используемые для расчетов

$n$  – общее количество товаров в группе;

$x_{0j}$  и  $x_{1j}$  – объем выручки, полученной от продаж  $j$ -го товара соответственно в базисном и текущем периодах,  $j=1, \dots, n$ ;

$q_{0j}$  и  $q_{1j}$  – физический объем продаж  $j$ -го товара соответственно в базисном и текущем периодах,  $j=1, \dots, n$ ;

$p_{0j} = \frac{x_{0j}}{q_{0j}}$  и  $p_{1j} = \frac{x_{1j}}{q_{1j}}$  – средние розничные цены на  $j$ -й товар соответственно в ба-

зисном и текущем периодах,  $j=1, \dots, n$ ;

Индивидуальные индексы:

$i_{pj} = \frac{p_{1j}}{p_{0j}}$  – индекс цен на  $j$ -й товар,  $j=1, \dots, n$ ;

$$i_{qj} = \frac{q_{1j}}{q_{0j}} - \text{индекс физического объема продаж } j\text{-го товара, } j=1, \dots, n;$$

Обороты по отдельным товарам:

$$x_{0j} = p_{0j} \cdot q_{1j} - \text{условный объем выручки, полученной от продаж } j\text{-го товара, } j=1, \dots, n;$$

Обороты в целом по товарной группе:

$$X_0 = \sum_{j=1}^n x_{0j} - \text{объем выручки в базисном периоде;}$$

$$X_1 = \sum_{j=1}^n x_{1j} - \text{объем выручки в текущем периоде;}$$

$$X_{01} = \sum_{j=1}^n p_{0j} \cdot q_{1j} - \text{условный объем выручки;}$$

Индивидуальные и агрегатный индексы (абсолютные приросты) объема выручки:

$$i_{xj} = \frac{x_{1j}}{x_{0j}} - \text{индекс объема выручки, полученной от продаж } j\text{-го товара, } j=1, \dots, n;$$

$$\Delta_{xj} = x_{1j} - x_{0j} - \text{абсолютный прирост объема выручки, полученной от продаж } j\text{-го товара, } j=1, \dots, n;$$

$$I_x = \frac{X_1}{X_0} - \text{агрегатный индекс объема выручки;}$$

$$\Delta_x = X_1 - X_0 - \text{абсолютный прирост объем выручки;}$$

Индивидуальные и агрегатные индексы изменения (абсолютные приросты) объема выручки за счет изменения цен на товары и физического объема товарооборота:

$$\bar{i}_{pj} = \frac{x_{1j}}{x_{01j}} - \text{индекс изменения объема выручки, полученной от продаж } j\text{-го товара}$$

за счет изменения цены на товар,  $j=1, \dots, n$ ;

$$\tilde{\Delta}_{pj} = x_{1j} - x_{01j} - \text{абсолютный прирост объема выручки, полученной от продаж } j\text{-го товара за счет изменения цены на товар, } j=1, \dots, n;$$

$$\bar{i}_{qj} = \frac{x_{01j}}{x_{0j}} - \text{индекс изменения объема выручки, полученной от продаж } j\text{-го товара}$$

за счет изменения физического объема продаж товара,  $j=1, \dots, n$ ;

$\tilde{\Delta}_{qj} = x_{01j} - x_{0j}$  – абсолютный прирост объема выручки, полученной от продаж  $j$ -го товара за счет изменения физического объема продаж товара,  $j=1, \dots, n$ ;

$I_p = \frac{X_1}{X_{01}}$  – агрегатный индекс изменения объема выручки за счет изменения цен на

товары;

$\Delta_p = X_1 - X_{01}$  – абсолютный прирост объема выручки за счет изменения цен на товары;

$I_q = \frac{X_{01}}{X_0}$  – агрегатный индекс изменения объема выручки за счет изменения физи-

ческого объема продаж товаров;

$\Delta_q = X_{01} - X_0$  – абсолютный прирост объема выручки за счет изменения физического объема продаж товаров.

### Выполнение задачи в *Microsoft Excel*

Для форматирования значений показателей *Абсолютный прирост* удобно использовать возможности табличного процессора по форматированию отрицательных чисел. Для чего следует:

- выделить нужный диапазон ячеек для форматирования;
- выбрать вкладку *Главная* → раскрыть группу *Число*;
- в раскрывшемся окне диалога *Формат ячеек* на вкладке *Число* в окне со списком *Числовые форматы*: выбрать вариант *Числовой* и справа в окне со списком *Отрицательные числа*: выбрать последний вариант – отрицательное число со знаком минус красного цвета *-1234,10*.

Для форматирования значений показателей *Индекс* удобно использовать возможности условного форматирования. Например, если необходимо в таблице выделить показатели индексов, значения которых упали, то в качестве условия для условного форматирования следует задать условие – *значения меньше 1*. Для чего следует:

- выделить нужный диапазон ячеек для форматирования;
- выбрать вкладку *Главная* → группу *Стили* → раскрыть список команд у кнопки Условное форматирование ▼;
- в раскрывшемся списке команд выбрать команду *Правила выделения ячеек* и далее в списке правил выбрать *Меньше...*;
- в раскрывшемся окне диалога *меньше* следует слева в окне ввода значений ввести значение 1 и справа в раскрывающемся списке вариантов форматирования

можно выбрать или подходящий шаблон формата или установить свои параметры форматирования, выбрав вариант *Пользовательский формат...*

Копирование формул в таблице можно выполнять с помощью маркера заполнения по смежным ячейкам таблицы.

Для вычисления значений показателей стоимости товарооборота можно использовать функцию *СУММ(...)* из категории *Математические*.

### ***Оценка динамики и прогнозирование объемов продаж***

Имеются данные, отражающие динамику объема продаж  $x_t$  товаров, входящих в ассортиментный набор предприятия розничной торговли, за время  $t = 1, 2, \dots, n$ .

Период $t$	Объем продаж (ед.) $x_t$			
	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
1	230	560	470	970
2	210	490	510	789
3	240	430	490	600
4	260	420	580	510
5	245	350	630	450
6	270	300	520	469
7	290	290	595	340
8	300	320	637	367
9	310	370	545	308
10	315	400	536	311
11	325	445	598	280
12	345	470	600	294

Требуется:

1. Выполнить анализ динамики объема продаж, для чего следует вычислить показатели динамики объема продаж.

#### **Формулы для вычисления показателей**

$n$  – число равных периодов для проведения анализа динамики объема продаж;

$x_t$  – объем продаж за период времени с номером  $t = 1, 2, \dots, n$ ;

$\Delta_t$  – абсолютный прирост показывает величину изменения объема продаж за определенный промежуток времени:

$\Delta_t^b = x_t - x_b$ , для  $t = 2, 3, \dots, n$ , (в качестве базисного периода с номером  $b$  можно выбрать любой из периодов  $b = 1, 2, \dots, n$ );

$$\Delta_t = x_t - x_{t-1}, \text{ для } t = 2, 3, \dots, n;$$

$\bar{\Delta}$  – средний абсолютный прирост объема продаж:

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{t=2}^n \Delta_t = \frac{x_n - x_1}{n-1}$$

$I_t$  – индекс (коэффициент) роста характеризует относительную скорость изменения уровней объема продаж и показывает, во сколько раз объем продаж сравниваемого периода больше или меньше уровня базисного периода:

$$I_t^b = \frac{x_t}{x_b}, \text{ для } t=2, 3, \dots, n;$$

$$I_t = \frac{x_t}{x_{t-1}}, \text{ для } t=2, 3, \dots, n;$$

$\bar{I}$  – средний индекс (коэффициент) роста:  $\bar{I} = \sqrt[n-1]{\prod_{t=2}^n I_t} = \sqrt[n-1]{\frac{x_n}{x_1}}$

$\delta_t$  – темп прироста показывает на сколько процентов уровень объема продаж сравниваемого периода больше или меньше уровня базисного периода:

$$\delta_t^b = \frac{x_t - x_b}{x_b} \cdot 100\% = (I_t^b - 1) \cdot 100\% \text{ для } t=2, 3, \dots, n;$$

$$\delta_t = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} \cdot 100\% = (I_t - 1) \cdot 100\% \text{ для } t=2, 3, \dots, n;$$

$\bar{\delta} = (\bar{I} - 1) \cdot 100\%$  – средний темп прироста;

$d_t$  – значение 1% прироста:  $d_t = \frac{\Delta_t}{\delta_t \cdot 100} = \frac{x_t - x_{t-1}}{\frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} \cdot 100} = \frac{x_{t-1}}{100}, t=2, 3, \dots, n.$

2. В предположении о сохранении в будущем заданной в таблице тенденции развития продаж:

- выполнить регрессионный анализ объема продаж: построить тренд, осуществить проверку адекватности полученной аналитической зависимости реальным данным и выполнить на ее основе прогнозирование объема продаж на следующий период;
- выполнить прогноз объема продаж на следующий период на основании полученного значения среднего абсолютного прироста и среднего коэффициента роста;
- вычислить индекс сезонных колебаний (сезонную волну) объема продаж за весь период без учета тенденции и с учетом тренда;

- построить совмещенный график динамики объема продаж и тренда за весь период по табличным данным.

### Построение тренда и прогнозирование объема продаж

Пусть зависимость  $x = x(t)$  задана таблично. Для определения тренда выполняют аналитическое выравнивание табличных данных с помощью функции, выбранной из множества функций вида  $x = x(t)$ :

$$x(t) = a_1 \cdot t + a_0 - \text{линейная};$$

$$x(t) = a_2 \cdot t^2 + a_1 \cdot t + a_0 - \text{квадратическая};$$

$$x(t) = a_3 \cdot t^3 + a_2 \cdot t^2 + a_1 \cdot t + a_0 - \text{кубическая};$$

$$x(t) = \frac{a_1}{a_2 + t} + a_0 - \text{гиперболическая};$$

$$x(t) = a_1 \cdot \ln t + a_0 - \text{логарифмическая};$$

$$x(t) = a_0 \cdot a_1^t - \text{показательная};$$

$$x(t) = a_0 \cdot t^{a_1} - \text{степенная и т.д.},$$

и наилучшим образом отражающую зависимость, заданную таблицей.

Для выбора нужной функции и вычисления ее параметров воспользуемся *методом наименьших квадратов*:

$$S = \sum_{t=1}^n (x_t - x(t))^2 \rightarrow \min$$

табличные данные

$x_1, x_2, \dots, x_n$

данные, вычисленные аналитически

(тренд)

$x(1), x(2), \dots, x(n)$

Функция  $S$  является функцией параметров  $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$  зависимости  $x = x(t)$ , то есть  $S = S(a)$ . Решение задачи заключается в нахождении неизвестных параметров  $a_0, a_1, a_2, \dots$ .

Например, если выбранная функция является *линейной*  $x(t) = a_1 t + a_0$ , то задача состоит в нахождении параметров  $a_0, a_1$ . Если же зависимость является *квадратической*  $x(t) = a_0 t^2 + a_1 t + a_2$ , то необходимо определить параметры  $a_0, a_1, a_2$ .

Аналитическое выравнивание табличных данных позволяет оценить общую тенденцию развития явления за прошедший период и осуществлять прогнозирование его развития на ближайшие периоды времени.

После определения тренда необходимо проверить полученную аналитическую зависимость на адекватность реальным данным. Для этого можно воспользоваться формулой (2.12) для вычисления средней относительной ошибки прогнозирования  $\varepsilon$ . Качественная оценка  $\varepsilon$  осуществляется на основе данных Таблицы № 2.1.

В случае если аналитическая зависимость достаточно точно отражает табличные данные, можно осуществлять прогноз объема продаж на следующий период времени с номером  $n+1$ .

### **Построение тренда и прогнозирование с помощью функций *ТЕНДЕНЦИЯ(...)* и *РОСТ(...)***

Если аппроксимирующая линия представляет собой прямую, то для прогнозирования можно воспользоваться функцией *ТЕНДЕНЦИЯ(...)* из категории *Статистические*. Если же имеет место показательная (экспоненциальная) зависимость, то можно воспользоваться функцией *РОСТ(...)*.

### **Построение тренда и прогнозирование на основе значений среднего абсолютного прироста и среднего индекса роста**

В случае если исходные данные подчиняются линейной зависимости, то построение тренда и прогнозирование значения показателя на будущие периоды можно выполнить по формуле:

$$x(t) = x(1) + (t-1) \cdot \bar{\Delta}, \quad t=1, 2, \dots, n, n+1, n+2, \dots$$

Если же исходные данные подчиняются показательной (экспоненциальной) зависимости, то построение тренда и прогнозирование выполняется по формуле:

$$x(t) = x(1) \cdot \bar{I}^{t-1}, \quad t=1, 2, \dots, n, n+1, n+2, \dots$$

### **Индекс сезонной волны**

Показателем колебаний значения какой-либо величины, которые носят сезонный характер в течение рассматриваемого периода времени, является *индекс сезонности (сезонной волны)*. Показатель выражается в долях единицы или в процентах и вычисляется следующим образом:

$$i_t = \frac{x_t}{\bar{x}},$$

где  $x_t$  – значение величины за период  $t$ , где  $t=1, \dots, n$ ;

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t$  – среднее значение величины за весь период  $[1, n]$ .

Однако, в случае, если наблюдается тенденция в процессе изменения величины, то индекс сезонности следует вычислять с использованием следующей формулы:

$i_t = \frac{x_t}{x(t)}$ , где  $x(t)$  – аналитически вычисленное значение величины за отрезок времени  $t$ .

### Выполнение задачи в *Microsoft Excel*

#### Вычисление основных показателей динамики объема продаж

Для вычисления основных показателей динамики объема продаж следует записать указанные ниже формулы для периода времени  $t=2$  и далее скопировать их на остальные периоды времени  $t=3, \dots, n$ :

базисные показатели:      цепные показатели:

$$\Delta_t^b = x_t - x_b$$

$$\Delta_t = x_t - x_{t-1}$$

$$I_t^b = \frac{x_t}{x_b}$$

$$I_t = \frac{x_t}{x_{t-1}}$$

$$\delta_t^b = (I_t^b - 1) \cdot 100\%$$

$$\delta_t = (I_t - 1) \cdot 100\%$$

При записи формул в *Microsoft Excel* для вычисления базисных показателей, необходимо учесть следующее. Так как в качестве базиса для сравнения обычно берется начальное значение ряда  $x_b = x_1$ , то во всех формулах перед копированием ссылку на ячейку, в которой находится  $x_b$ , необходимо зафиксировать, то есть вызвать абсолютную ссылку (с помощью функциональной клавиши *F4*), так как адрес этой ячейки при копировании формулы не должен меняться. При вычислении же цепных показателей в формулах используются только относительные ссылки на ячейки таблицы (см. Рис.2.10).

При вычислении темпа прироста объема продаж, который выражается в процентах, можно в формуле не умножать значение на 100%, а воспользоваться форматированием содержимого ячейки в числовой формат – *процентный*.

	В	С	Е	Ф
1	Абсолютный прирост			
	Период времени	Объем продаж	базисный $\Delta^B$	цепной $\Delta^Ц$
2	$t$	$x_t$		
3	1	230		
4	2	210	=C5-\$C\$4	=C5-C4
5	3	240	10	30
6	4	260	30	20
7	5	245	15	-15
8	6	270	40	25
9	7	290	60	20
10	8	300	70	10
11	9	310	80	10
12	10	315	85	5
13	11	325	95	10
14	12	345	115	20
15	Средний	278		10,5

**Рис. 2.10** Вычисление базисного и цепного абсолютного прироста

При вычислении значений абсолютного прироста объема продаж, в ячейках таблицы могут получаться отрицательные значения. Для более наглядного восприятия полученных результатов, можно при форматировании значений использовать числовой формат с дополнительным форматированием отрицательных по значению чисел (см. Рис.2.11).

Для вычисления средних показателей динамики объема продаж можно использовать следующие формулы:

$$\bar{\Delta} = \frac{x_n - x_1}{n - 1}; \quad \bar{I} = n-1 \sqrt[n-1]{\frac{x_n}{x_1}}; \quad \bar{\delta} = (\bar{I} - 1) \cdot 100\%$$

При вычислении корня  $n - 1$  степени можно воспользоваться:

- или следующим математическим тождеством  $\sqrt[n]{x^a} = x^{\frac{a}{n}}$ :  

$$= (x_n / x_1)^{1 / (n-1)}$$
- или функцией *СТЕПЕНЬ*(...) из категории *Математические*:  

$$= \text{СТЕПЕНЬ}(x_n / x_1; 1 / (n-1))$$

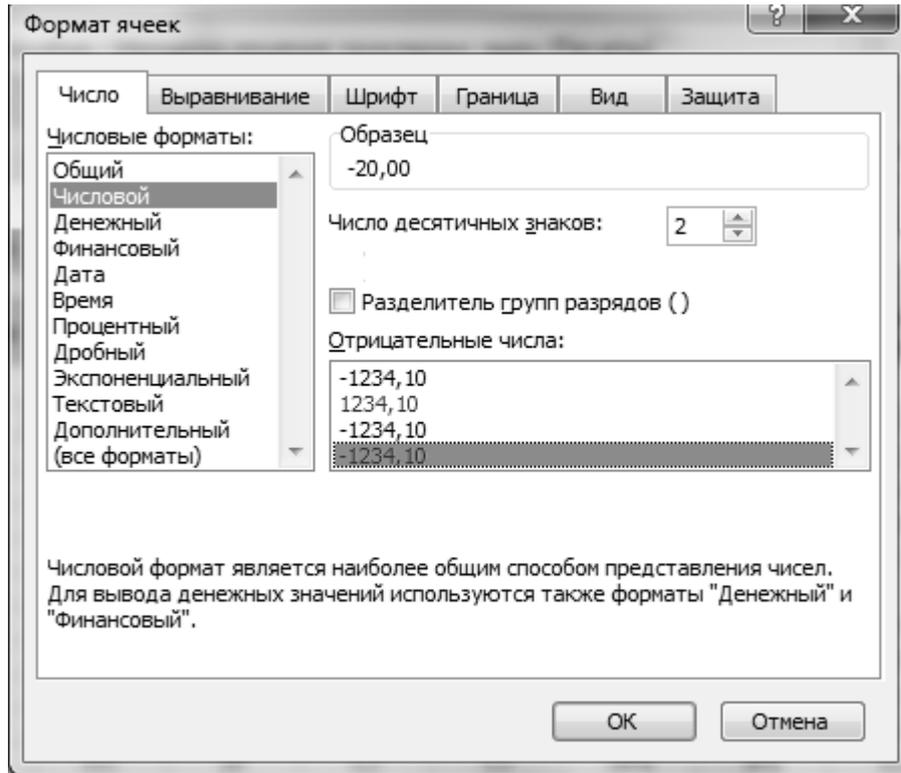


Рис. 2.11 Выбор числового формата для форматирования отрицательных чисел

### Построение тренда в Microsoft Excel

#### 1. Построение линии тренда с помощью Мастера диаграмм

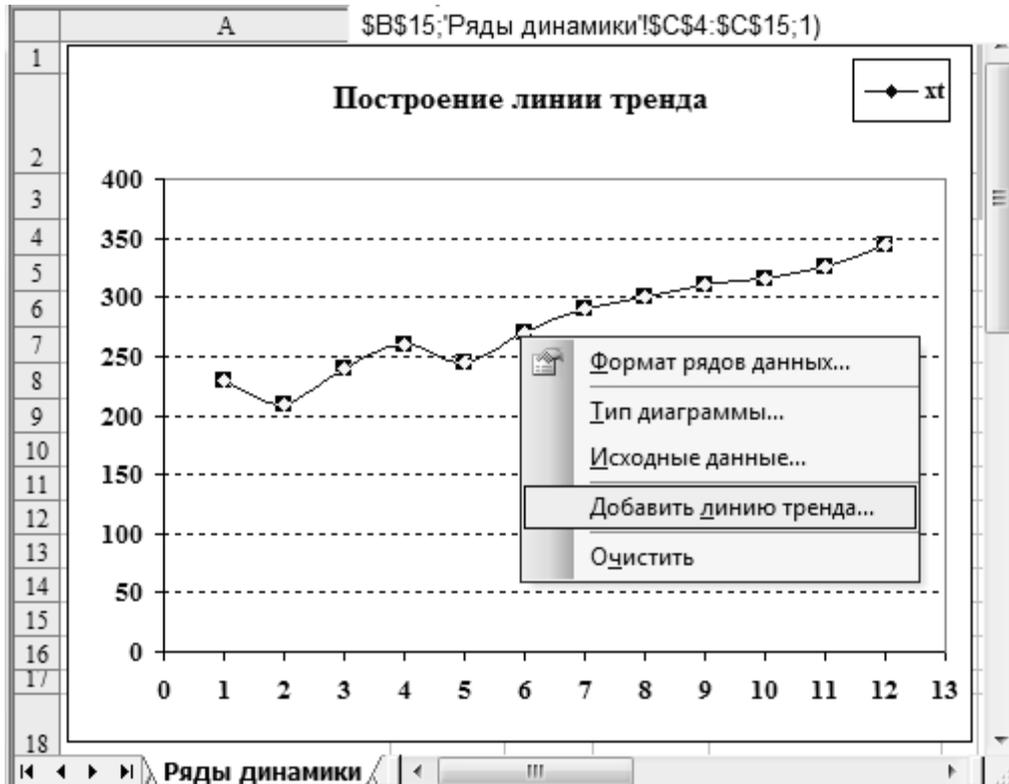


Рис. 2.12 Построение тренда с помощью Мастера диаграмм

1. Выделить исходные данные, на основе которых должна быть построена линия тренда – массив периодов времени  $t=1,2,\dots,n$  и массив значений объемов продаж  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .
2. Выбрать вкладку *Вставка* → группу *Диаграммы* → тип диаграммы *Точечная*.
3. После построения диаграммы следует выделить самую кривую на области построения диаграммы. Выбрать вкладку *Макет* → группу *Анализ* → кнопку с раскрывающимся списком *Линия тренда* → команду *Дополнительные параметры линии тренда...*, или к выделенной кривой на графике вызвать контекстное меню по правой кнопке мыши, в котором следует выбрать команду *Добавить линию тренда...* (см. Рис.2.12).
4. Далее в раскрывшемся окне диалога *Формат линии тренда* на вкладке *Параметры линии тренда* (см. Рис.2.13):
  - в группе переключателей выбрать наиболее подходящий тип линии тренда – *Экспоненциальная*, *Линейная*, *Логарифмическая*, *Полиномиальная*, *Степенная*, *Линейная фильтрация*;
  - в группе *Название аппроксимирующей (сглаженной) кривой* выбрать или ввести название кривой, установив соответствующий переключатель  *автоматическое*: или  *другое*: ;
  - можно осуществить прогноз на заданное количество периодов в группе *Прогноз* с помощью окна ввода *вперед на:* или *назад на:*;
  - установить флажок  *показывать уравнение на диаграмме*;
  - установить флажок  *поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации ( $R^2$ )*.
  - Подтвердить построение линии тренда на диаграмме, выбрав кнопку Заккрыть или нажав клавишу *Enter*.

В результате *Microsoft Excel* построит линию тренда и на графике будет выведено уравнение тренда, величина достоверности результата и будет продлена кривая - прогноз на указанное количество периодов (см. Рис.2.14).

В окне диалога *Формат линии тренда* на вкладках *Цвет линии*, *Тип линии*, *Тень* можно установить дополнительные параметры форматирования для построенной линии тренд – цвета линий, типы линий, различные варианты теней.

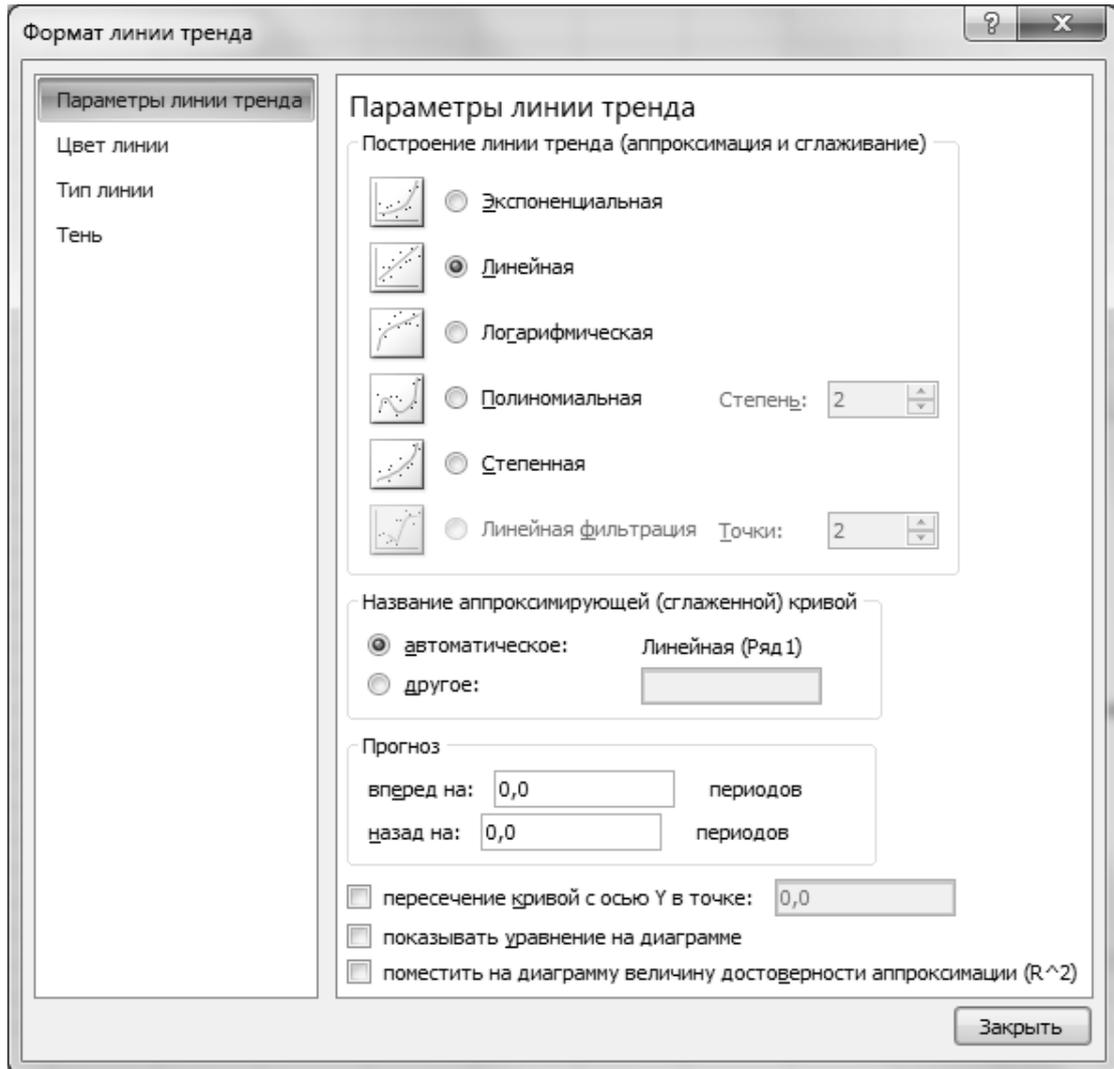


Рис. 2.13 Окно диалога *Линия тренда* вкладка *Тип*

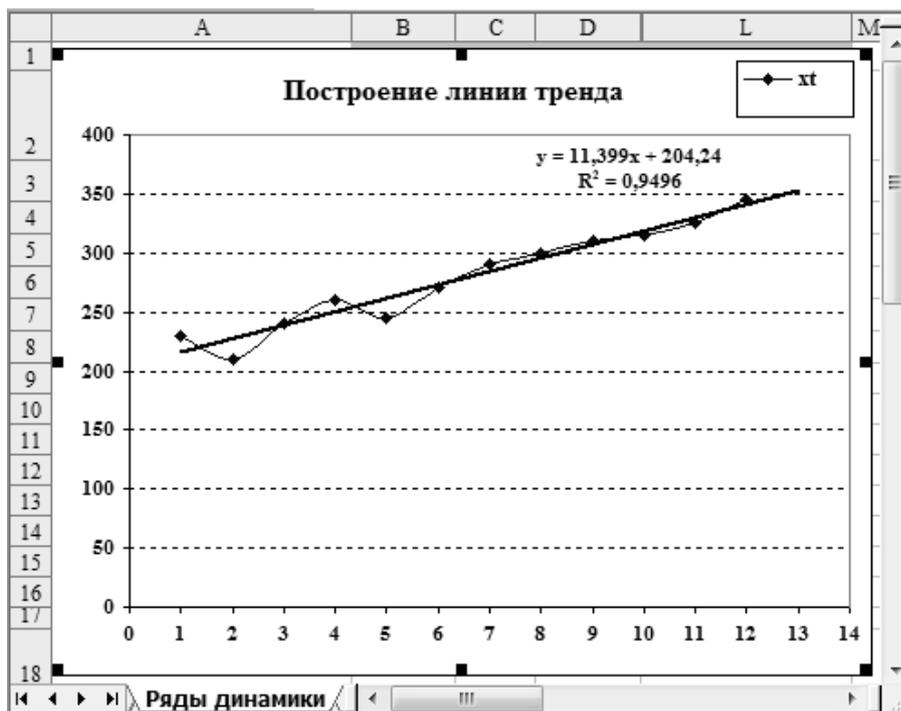


Рис. 2.14 График *Исходные данные* и *Линия тренда*

## 2. Построение линии тренда с помощью модуля Поиск решения

1. Построить по табличным данным график зависимости  $x$  от  $t$ .
2. На основании графика выбрать наиболее подходящий вид зависимости  $x = x(t)$ , которой подчиняются табличные данные: линейная, квадратическая, кубическая, степенная и другие.
3. Задать начальные значения коэффициентов  $a_0, a_1, a_2, \dots$  равные 0 для выбранной функциональной зависимости. Например:

Линейная зависимость		Квадратическая зависимость		Кубическая зависимость	
$x(t)=a_1 \cdot t+a_0$		$x(t)=a_2 \cdot t^2+a_1 \cdot t+a_0$		$x(t)=a_3 \cdot t^3+a_2 \cdot t^2+a_1 \cdot t+a_0$	
$a_0=$	0	$a_0=$	0	$a_0=$	0
$a_1=$	0	$a_1=$	0	$a_1=$	0
		$a_2=$	0	$a_2=$	0
				$a_3=$	0

4. Далее построить ряд значений тренда путем вычисления  $x(t)$  для каждого значения  $t$ . То есть следует записать уравнение выбранной функциональной зависимости для периода времени  $t=1$  и далее скопировать формулу для остальных периодов времени  $t=2,3,\dots,n$ . При этом нужно учесть, что в формуле используются коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , которые являются постоянными для всех значений периодов времени  $t=1,2,3,\dots,n$ . Поэтому перед копированием формулы ссылки на ячейки, в которых находятся значения неизвестных коэффициентов  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , необходимо зафиксировать, то есть вызвать абсолютные ссылки (с помощью функциональной клавиши F4), так как адреса этих ячеек при копировании формулы не должны меняться. Например, для линейной зависимости это будет выглядеть следующим образом (см. Рис.2.15).
5. В ячейке следует записать критерий решения задачи:

$$S = \sum_{t=1}^n (x_t - x(t))^2 \rightarrow \min$$

Для записи данного выражения можно воспользоваться функцией СУММКВРАЗН(...) из категории Математические (см. Рис.2.16):

$$=СУММКВРАЗН(x_1, x_2, \dots, x_n; x(1), x(2), \dots, x(n))$$

↑
↑  
 табличные данные                      данные, вычисленные аналитически (тренд)  
 $x_1, x_2, \dots, x_n$                        $x(1), x(2), \dots, x(n)$

	В	С	Л	Р	С	Т
1	Период	Объем	Тренд - по методу		Линейная	
2	времени	продаж	наименьших		зависимость	
3	$t$	$x_t$	квадратов		$x(t)=a_0 \cdot t+a_1$	
4	1	230	= $ST\$4*B4+ST\$5$		$a_0 =$	0
5	2	210	0		$a_1 =$	0
6	3	240	0		$S \Rightarrow \min$	949200
7	4	260	0			
8	5	245	0			
9	6	270	0			
10	7	290	0			
11	8	300	0			
12	9	310	0			
13	10	315	0			
14	11	325	0			
15	12	345	0			

**Рис. 2.15** Построение ряда значений для линейного тренда

	В	С	D	Р	С	Т	U	V	W
1	Период	Объем	Тренд -		Линейная				
2	времени	продаж	Аналитический		зависимость				
3	$t$	$x_t$	$x(t)$		$x(t)=a_0 \cdot t+a_1$				
4	1	230	0		$a_0 =$	0			
5	2	210	0		$a_1 =$	0			
6	3	240	0		$S \Rightarrow \min$	= $СУММКВРАЗН(C4:C15;D4:D15)$			
7	4	260	0		$\varepsilon =$				
8	5	245	0		$\varepsilon =$				
9	6	270	0						
10	7	290	0						
11	8	300	0						
12	9	310	0						
13	10	315	0						
14	11	325	0						
15	12	345	0						
16	Средний	278							

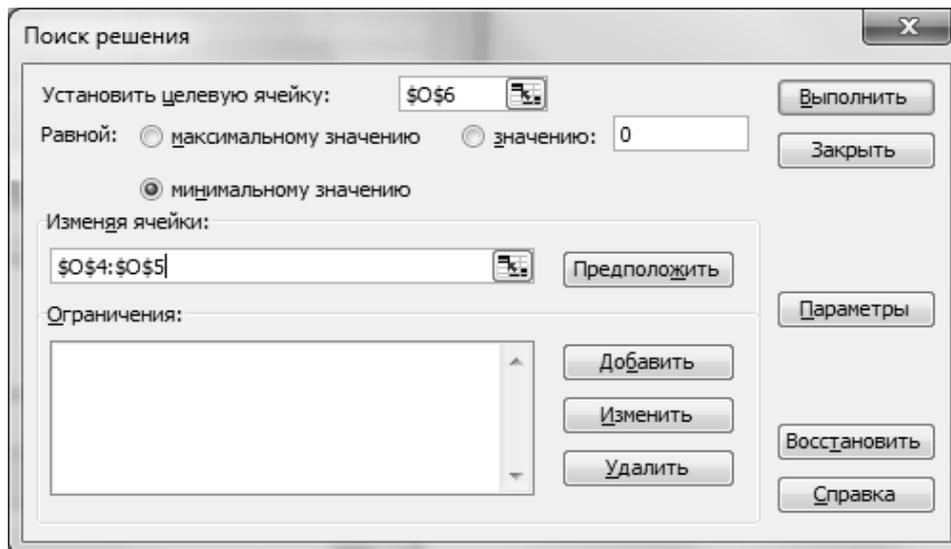
**Рис. 2.16** Запись выражения  $S = \sum_{t=1}^n (x_t - x(t))^2 \rightarrow \min$ 

- б. Перейти к решению задачи  $S(a) \rightarrow \min$ . Выбрать вкладку *Данные* → группу *Анализ* → кнопку *Поиск решения*. В результате загрузится окно диалога *Поиск решения* (см. Рис.2.17), в котором:
- В окне поля ввода *Установить целевую ячейку*: ввести ссылку на ячейку, содержащую описание функции  $S$ .

- В группе переключателей *Равной:* установить переключатель  *минимальному значению.*
- В окне поля *Изменяя ячейки:* ввести ссылки на ячейки, в которых находятся начальные нулевые значения заданных коэффициентов выбранной функциональной зависимости  $a_0, a_1, a_2, \dots$

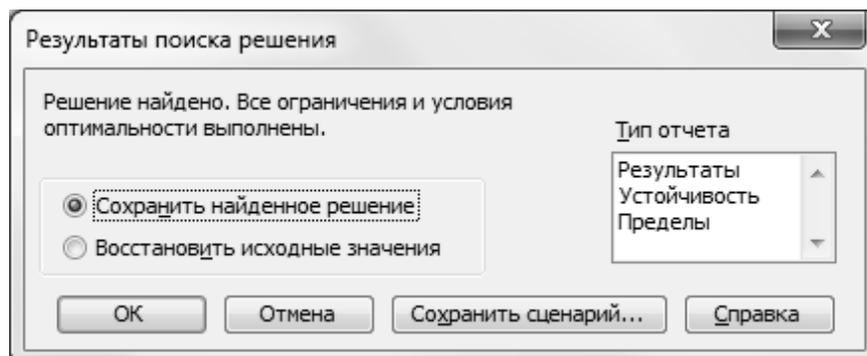
Например:

- для *линейной* зависимости – это ссылки на ячейки, в которых находятся значения  $a_0, a_1$ ;
- для *квадратической* зависимости – это ссылки на ячейки, в которых находятся значения  $a_0, a_1, a_2$ ;
- для *кубической* зависимости – это ссылки на ячейки, в которых находятся значения  $a_0, a_1, a_2, a_3$ .



**Рис. 2.17** Окно диалога *Поиск решения*

- Далее выбрать кнопку . В результате *Microsoft Excel* подберет подходящее решение и выведет соответствующее сообщение в окно диалога *Результаты поиска решения* (см. Рис.2.18):



**Рис. 2.18** Окно диалога *Результаты поиска решения*

– Найденное решение сохранить с помощью кнопки  или клавиши *Enter*.

*Замечание:* В случае, если по графику невозможно однозначно определить вид функциональной зависимости  $x = x(t)$ , выбирают несколько наиболее подходящих зависимостей, а затем для каждой из них выполняют указанные выше расчеты. Таким образом, получают несколько значений функции  $S$ :  $S_1, S_2, S_3, \dots$ . Функциональную зависимость, для которой значение  $S$  будет наименьшим, можно принять в качестве наилучшего приближения табличных данных.

7. Построить совмещенный график табличной зависимости  $x$  от  $t$  и тренда  $x(t)$ .
8. По формуле (2.12) вычислить среднюю относительную ошибку прогнозирования  $\varepsilon$ . В *Microsoft Excel* это можно сделать одним из следующих способов.

### 1-й способ

	В	С	D	L	R	S	T	U
1				Средняя		Линейная		
	Период	Объем	Тренд -	относительная		зависимость		
2	времени	продаж	Аналитический	ошибка				
3	$t$	$x_t$	$x(t)$	$\varepsilon$		$x(t)=a_0 \cdot t+a_1$		
4	1	230	216	=ABS((C4-D4)/C4)		$a_0 =$	11	
5	2	210	227	8%		$a_1 =$	204	
6	3	240	238	1%		$S \Rightarrow \min$	987	
7	4	260	250	4%		$\varepsilon =$	=СРЗНАЧ(L4:L15)	
8	5	245	261	7%		$\varepsilon =$		
9	6	270	273	1%				
10	7	290	284	2%				
11	8	300	295	2%				
12	9	310	307	1%				
13	10	315	318	1%				
14	11	325	330	1%				
15	12	345	341	1%				
16	Средний	278						

**Рис. 2.19** Вычисление ошибки прогнозирования

– Следует построить отдельный ряд значений по формуле общего члена ряда

$$\left| \frac{x_t - x(t)}{x_t} \right|, \text{ для всех периодов времени } t=1,2,3,\dots,n.$$

Для этого следует записать формулу для значений  $t=1, x_1$  и  $x(1)$  и далее скопировать формулу по смежным ячейкам для остальных значений  $t=2,3,\dots,n$ ;  $x_2, x_3, \dots, x_n$ ;  $x(2), x(3), \dots, x(n)$  (см. Рис.2.19).

– Отформатировать полученные значения в числовой формат – *процентный*.

- Вычислить среднее арифметическое полученных значений ряда с помощью функции *СРЗНАЧ(...)* из категории *Статистические*.

### 2-й способ

- Записать формулу для вычисления средней ошибки прогнозирования в следующем виде:

$$=СРЗНАЧ(ABS((\text{массив } x_t - \text{массив } x(t))/\text{массив } x_t))$$

↑
↑

табличные данные (объем продаж)  $x_1, \dots, x_n$ 
данные, вычисленные аналитически (тренд)  $x(1), \dots, x(n)$

- Выход из формулы следует выполнить с помощью комбинации клавиш *Ctrl + Shift + Enter*. В результате *Microsoft Excel* обработает поэлементно соответствующие элементы указанных массивов чисел в целом и вернет одно конечное значение. При этом выражение формулы в *Строке формул* будет взято в фигурные скобки (см. Рис.2.20).

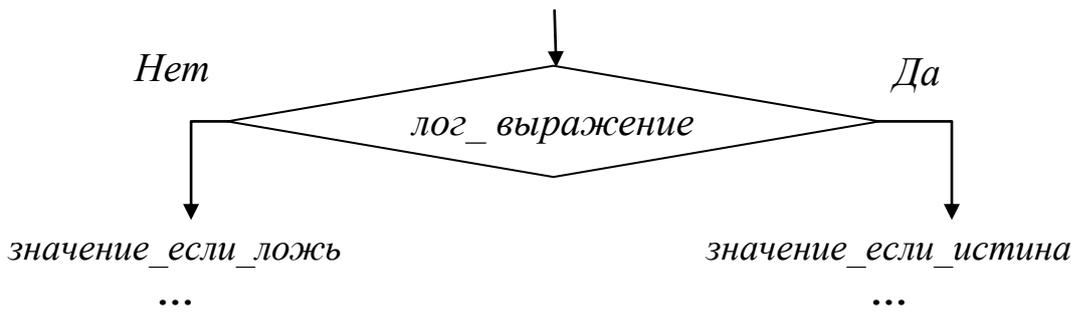
Период времени	Объем продаж	Тренд - Аналитический	Средняя относительная ошибка прогнозирования	Линейная зависимость
t	x <sub>t</sub>	x(t)	ε	x(t)=a <sub>0</sub> · t+a <sub>1</sub>
1	230	216	6%	a <sub>0</sub> = 11
2	210	227	8%	a <sub>1</sub> = 204
3	240	238	1%	S => min 987
4	260	250	4%	ε = 2,9%
5	245	261	7%	ε = =СРЗНАЧ(ABS((C4:C15-D4:D15)/C4:C15))
6	270	273	1%	
7	290	284	2%	
8	300	295	2%	
9	310	307	1%	
10	315	318	1%	
11	325	330	1%	
12	345	341	1%	
Средний	278			

**Рис. 2.20** Вычисление ошибки прогнозирования

9. Полученное значение средней относительной ошибки прогнозирования  $\epsilon$  следует интерпретировать на основании данных Таблицы № 2.1. Для этого можно воспользоваться функцией *ЕСЛИ(...)* из категории *Логические*:

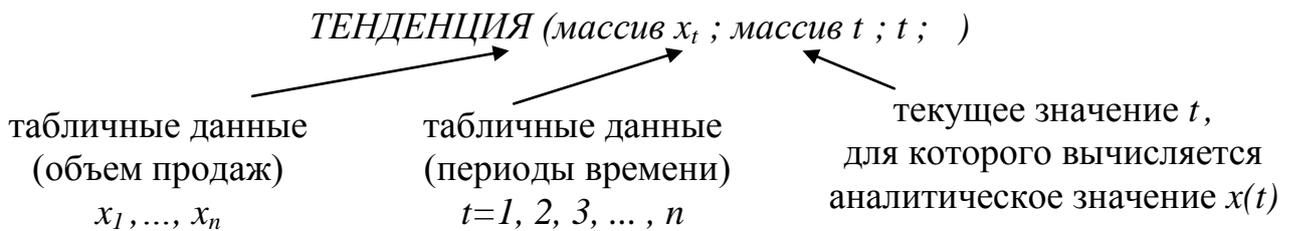
*ЕСЛИ(лог выражение; значение если истина; значение если ложь)*

Работа данной функции соответствует блоку «решение» языка блок-схем:



10. Если исходные табличные данные подчиняются линейной зависимости, то построение тренда и прогнозирование, при сохранении в будущем тенденции развития, можно выполнить с помощью функции *ТЕНДЕНЦИЯ(...)* из категории *Статистические*:

*ТЕНДЕНЦИЯ* (извест. знач.  $y$  ; извест. знач.  $x$  ; новые. знач.  $x$  ; конст)



Для получения значений тренда с помощью функции *ТЕНДЕНЦИЯ(...)* следует записать функцию для периода времени  $t=1$  и далее скопировать эту формулу для остальных периодов времени  $t=2,3,\dots,n$ . При этом нужно учесть следующее, в формуле в качестве аргументов у функции используются массивы исходных данных – объем продаж  $x_1, \dots, x_n$  и месяца  $t=1,2,3,\dots,n$ , которые являются постоянными для каждого нового текущего значения  $t=1,2,3,\dots,n$ .

Поэтому, перед копированием формулы ссылки на ячейки таблицы, в которых находятся значения указанных массивов  $x_1, \dots, x_n$  и  $t=1,2,3,\dots,n$ , необходимо зафиксировать, то есть вызвать абсолютные ссылки с помощью клавиши *F4*, так как адреса этих ячеек при копировании формулы не должны меняться (см. Рис.2.21).

Прогнозирование объема продаж с помощью данной функции *ТЕНДЕНЦИЯ(...)* можно выполнить, если в качестве текущего значения аргумента функции *новые\_знач\_x* указать значение *I3* или ссылку на ячейку таблицы, где находится значение *I3*:

*ТЕНДЕНЦИЯ* (массив  $x_t$  ; массив  $t$  ; *I3*; )

	A	B	C	D	M	O
1						
2		Месяц	Объем продаж	Тренд - Аналитический	Тренд - по функции ТЕНДЕНЦИЯ(...)	
3		$t$	$x_t$	$x(t)$		
4		1	230	216	=ТЕНДЕНЦИЯ(\$C\$4:\$C\$15;\$B\$4:\$B\$15;B4)	
5		2	210	227	227	
6		3	240	238	238	
7		4	260	250	250	
8		5	245	261	261	
9		6	270	273	273	
10		7	290	284	284	
11		8	300	295	295	
12		9	310	307	307	
13		10	315	318	318	
14		11	325	330	330	
15		12	345	341	341	
16		Средний	278			
17						
18	$X(13)=a_0 * 13 + a_1$	13				
21	Прогноз с помощью функции ТЕНДЕНЦИЯ(...)	=ТЕНДЕНЦИЯ(\$C\$4:\$C\$15;\$B\$4:\$B\$15;13;)				

**Рис. 2.21** Построение тренда с помощью функции *ТЕНДЕНЦИЯ(...)*

11. Если исходные табличные данные подчиняются показательной / экспоненциальной зависимости, то построение тренда и прогнозирование, при сохранении в будущем тенденции развития, можно выполнить с помощью функции *РОСТ(...)* из категории *Статистические*:

*РОСТ* (извест\_знач\_y ; извест\_знач\_x ; новые\_знач\_x ; конст)

*РОСТ* (массив  $x_t$  ; массив  $t$  ;  $t$  ; )

табличные данные  
(объем продаж)  
 $x_1, \dots, x_n$

табличные данные  
(периоды времени)  
 $t=1, 2, 3, \dots, n$

текущее значение  $t$ ,  
для которого вычисляется  
 $x(t)$

Для получения значений тренда с помощью функции *РОСТ(...)* следует записать функцию для периода времени  $t=1$  и далее скопировать эту формулу для остальных периодов времени  $t=2,3,\dots,n$ . При этом нужно учесть следующее, в формуле в качестве аргументов у функции используются массивы исходных данных – объем продаж  $x_1, \dots, x_n$  и месяца  $t=1,2,3,\dots,n$ , которые являются постоянными для каждого нового текущего значения  $t=1,2,3,\dots,n$ . Поэтому, перед копированием формулы ссылки на ячейки таблицы, в которых находятся значения указанных массивов  $x_1, \dots, x_n$  и  $t=1,2,3,\dots,n$  необходимо зафиксировать, то есть вызвать абсолютные ссылки с помощью функциональной клавиши *F4*, так как адреса этих ячеек при копировании формулы не должны меняться (см. Рис.2.22).

	A	B	C	D	N	O
1						
2		Месяц	Объем продаж	Тренд - Аналитический	Тренд - по функции РОСТ(...)	
3		t	x <sub>t</sub>	x(t)		
4		1	230	216	=РОСТ(\$C\$4:\$C\$15;\$B\$4:\$B\$15;B4)	
5		2	210	227	229	
6		3	240	238	238	
7		4	260	250	248	
8		5	245	261	259	
9		6	270	273	270	
10		7	290	284	281	
11		8	300	295	293	
12		9	310	307	305	
13		10	315	318	318	
14		11	325	330	332	
15		12	345	341	346	
16		Средний	278			
17						
18	X(13)=a <sub>0</sub> *13+a <sub>1</sub>	13				
22	Прогноз с помощью функции РОСТ(...)				=РОСТ(\$C\$4:\$C\$15;\$B\$4:\$B\$15;13;)	

**Рис. 2.22** Построение тренда с помощью функции РОСТ(...)

Прогнозирование объема продаж с помощью данной функции РОСТ(...) можно выполнить, если в качестве текущего значения аргумента функции *новые\_знач\_x* указать значение 13 или ссылку на ячейку таблицы, где находится значение 13:

$$РОСТ(\text{массив } x_t; \text{ массив } t; 13; )$$

12. Для вычисления показателя *индекс сезонности (сезонной волны)* можно воспользоваться формулой:  $i_t = \frac{x_t}{\bar{x}}$ ,

где  $x_t$  – значение величины за отрезок времени  $t$ , где  $t=1, \dots, n$ ;

$\bar{x}$  – среднее значение величины за весь период времени.

Для этого следует записать формулу для периода времени  $t=1$  и далее скопировать эту формулу для остальных периодов времени  $t=2, 3, \dots, n$ . При этом нужно учесть, что в формуле используется ссылка на средний объем продаж, который является постоянным значением для каждого нового текущего значения  $t=1, 2, \dots, n$ . Поэтому, перед копированием формулы ссылку на ячейку таблицы, в которой находится средний объем продаж, необходимо зафиксировать, то есть вызвать абсолютную ссылку с помощью клавиши F4, так как адрес этой ячейки при копировании формулы не должен меняться (см. Рис.2.23):

	В	С	Д	О
1	Месяц	Объем продаж	Тренд - Аналитический	Индекс сезонной волны
2				
3	$t$	$x_t$	$x(t)$	$i_t$
4	1	230	216	=C4/SC\$16
5	2	210	227	0,75
6	3	240	238	0,86
7	4	260	250	0,93
8	5	245	261	0,88
9	6	270	273	0,97
10	7	290	284	1,04
11	8	300	295	1,08
12	9	310	307	1,11
13	10	315	318	1,13
14	11	325	330	1,17
15	12	345	341	1,24
16	Средний	278		
17				

**Рис. 2.23** Вычисление индекса сезонной волны

**Результаты вычислений по варианту №1:**
**Анализ динамики объема продаж**

Месяц	Объем продаж	Тренд	Абсолютный прирост		Индекс роста		Темп прироста		Значение 1 % прироста
			базисный	цепной	базисный	цепной	базисный	цепной	
<b>1</b>	230	216							
<b>2</b>	210	227	-20	-20	0,9	0,9	-9%	-9%	2,3
<b>3</b>	240	238	10	30	1,0	1,1	4%	14%	2,1
<b>4</b>	260	250	30	20	1,1	1,1	13%	8%	2,4
<b>5</b>	245	261	15	-15	1,1	0,9	7%	-6%	2,6
<b>6</b>	270	273	40	25	1,2	1,1	17%	10%	2,5
<b>7</b>	290	284	60	20	1,3	1,1	26%	7%	2,7
<b>8</b>	300	295	70	10	1,3	1,0	30%	3%	2,9
<b>9</b>	310	307	80	10	1,3	1,0	35%	3%	3,0
<b>10</b>	315	318	85	5	1,4	1,0	37%	2%	3,1
<b>11</b>	325	330	95	10	1,4	1,0	41%	3%	3,2
<b>12</b>	345	341	115	20	1,5	1,1	50%	6%	3,3
<b>Ср.</b>	<b>278</b>			<b>10,5</b>		<b>1,04</b>		<b>4%</b>	

Линейная зависимость $x(t)=a_1*t+a_0$		Прогноз ТО на 13 период	
$a_1 =$	11,40	$x(13)=a_1 \cdot 13 + a_0$	352
$a_0 =$	204,24	С помощью функции <i>ТЕНДЕНЦИЯ( )</i>	352
$S \rightarrow \min$	986,95	На основе среднего абс. прироста $\bar{\Delta}$	355
$\varepsilon =$	2,9%	На основе среднего индекса роста $\bar{T}$	358

### Корреляционно-регрессионный анализ динамики объемов продаж

Данные, отражающие динамику физического объема продаж  $Q(t)$  на предлагаемый предприятием торговли набор из 5 товаров за равные периоды  $t = 1, \dots, 24$ , представлены в таблице ниже.

Период $t$	Физический объем продаж $Q(t)$ товаров				
	1	2	3	4	5
1	29	170	20	159	56
2	50	169	24	135	54
3	47	143	38	106	42
4	60	141	47	125	35
5	64	116	30	107	59
6	69	87	56	100	40
7	85	107	64	119	46
8	100	80	67	95	49
9	112	73	77	91	57
10	108	51	92	82	68
11	102	54	93	74	94
12	103	67	125	65	102
13	102	35	130	60	98
14	115	40	127	64	90
15	120	41	128	72	79
16	110	45	129	76	116
17	119	45	140	93	130
18	125	46	120	117	145
19	127	40	109	124	110
20	125	35	112	129	150
21	130	42	124	140	97
22	131	30	101	142	107
23	127	36	92	139	110
24	126	38	79	144	173

Требуется:

1. В предположении о сохранении в будущем, представленной в таблице тенденции развития продаж каждого товара, выполнить аналитическое выравнивание табличных данных, проверить модель на адекватность и осуществить прогнозирование объемов продаж на будущие периоды  $t=25, 26, \dots$ .
2. На основании табличных данных и прогнозного значения построить график тренда объемов продаж.
3. В предположении о сохранении в будущем заданной в таблице тенденции развития продаж, для каждого товара требуется подобрать такой вид аналитической зависимости  $x = x(t)$ , который обеспечил бы в дальнейшем точное прогнозирование объемов продаж.
4. Проверить полученную модель на адекватность, вычислив среднюю относительную ошибку прогнозирования  $\varepsilon$ .
5. Определить степень тесноты связи между факторным и результативным признаками (между временем и объемом продаж), вычислив корреляционное отношение  $\eta$ .
6. Построить совмещенные графики таблично заданных значений объемов продаж  $x_t$  и подобранной аналитической зависимости  $x = x(t)$ .
7. Осуществить прогноз объемов продаж на период времени  $n+k$ , где  $k=1, 2, \dots$ .

### Формулы для вычисления показателей

$n$  – число периодов для проведения анализа динамики объема продаж;

$x_t$  – фактический объем продаж за период  $t=1, \dots, n$ ;

$x(t)$  – аналитически вычисленный объем продаж за период  $t=1, \dots, n$ , полученный с помощью МНК;

$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n x_t$  – среднее значение, рассчитанное по табличным данным;

$\varepsilon = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n \left| \frac{x_t - x(t)}{x_t} \right| \cdot 100\%$  – средняя относительная ошибка прогнозирования;

$\eta = \sqrt{1 - \frac{\sum_{t=1}^n (x(t) - x_t)^2}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2}}$  – корреляционное отношение;

$D_T = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2$  – общая дисперсия;

$$D_F = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n (x(t) - \bar{x})^2 \text{ – факторная дисперсия;}$$

$$D_R = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n (x_t - x(t))^2 \text{ – остаточная дисперсия.}$$

### Выполнение задачи в *Microsoft Excel*

Построение тренда, вычисление средней относительной ошибки прогнозирования  $\varepsilon$ , прогнозирование объема продаж можно выполнить с помощью алгоритмов, описанных в предыдущем практическом задании.

Вычисление корреляционного отношения  $\eta$ :

#### 1-й способ вычисления корреляционного отношения

$$\eta = \sqrt{\frac{D_F}{D_T}} \cdot (*).$$

Для вычисления *общей дисперсии* можно использовать функцию *ДИСПР(...)* из категории *Статистические*, которая вычисляет дисперсию по генеральной совокупности:

$$= \text{ДИСПР}(x_1, \dots, x_n)$$

Для вычисления *факторной дисперсии* можно записать в ячейке формулу в следующем виде:

$$= \text{СРЗНАЧ}(\text{массив } x(t) - \text{СРЗНАЧ}(\text{массив } x_t))^2$$

↑
↑

данные, вычисленные аналитически (тренд)  $x(1), \dots, x(n)$ 
исходные табличные данные  $x_1, \dots, x_n$

Выход из формулы следует выполнить с помощью комбинации клавиш *Ctrl + Shift + Enter*.

В результате *Microsoft Excel* обработает поэлементно соответствующие элементы указанных массивов чисел и вернет одно конечное значение. При этом выражение формулы в *Строке формул* будет взято в фигурные скобки.

Полученные значения общей и факторной дисперсии следует подставить в формулу (\*). Для вычисления корня квадратного из полученного значения можно использовать функцию *КОРЕНЬ(...)* из категории *Математические*.

## 2-й способ вычисления корреляционного отношения

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{D_R}{D_T}}. \quad (**)$$

Для вычисления *общей дисперсии* можно использовать функцию *ДИСПР(...)* из категории *Статистические*, которая вычисляет дисперсию по генеральной совокупности:

$$= \text{ДИСПР}(\text{исходные табличные данные } x_1, \dots, x_n)$$

Для вычисления *остаточной дисперсии* можно записать в ячейке формулу в следующем виде:

$$= \text{СРЗНАЧ}(\text{массив } x_t - \text{массив } x(t) )^2$$

↑
↓

табличные данные данные, вычисленные аналитически  
 $x_1, \dots, x_n$  (тренд)  $x(1), \dots, x(n)$

Выход из формулы следует выполнить с помощью комбинации клавиш *Ctrl + Shift + Enter*.

В результате *Microsoft Excel* обработает поэлементно соответствующие элементы указанных массивов чисел и вернет одно конечное значение. При этом выражение формулы в *Строке формул* будет взято в фигурные скобки.

Полученные значения общей дисперсии и остаточной дисперсии следует подставить в формулу (\*\*). Для вычисления корня квадратного из полученного значения можно использовать функцию *КОРЕНЬ(...)* из категории *Математические*.

## 3-й способ вычисления корреляционного отношения

$$\eta = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (x(t) - \bar{x})^2}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2}} \quad (***)$$

Для вычисления значения числителя можно записать в ячейке формулу в следующем виде:

$$= \text{СУММ}(\text{массив } x(t) - \text{СРЗНАЧ}(\text{массив } x_t) )^2$$

↑
↓

данные, вычисленные аналитически (тренд) табличные данные  
 $x(1), \dots, x(n)$   $x_1, \dots, x_n$

Выход из формулы следует выполнить с помощью комбинации клавиш *Ctrl + Shift + Enter*. В результате чего *Microsoft Excel* обработает поэлементно соот-

ветствующие элементы указанных массивов чисел в целом и вернет одно конечное значение. При этом выражение формулы в *Строке формул* будет взято в фигурные скобки.

Для вычисления значения знаменателя можно использовать функцию

*КВАДРОТКЛ(число 1; число 2; ...)*

из категории *Статистические*, которая возвращает сумму квадратов отклонений точек данных от их среднего:

*КВАДРОТКЛ(исходные табличные данные  $x_1, \dots, x_n$ )*

Полученные значения числителя и знаменателя следует подставить в формулу (\*\*).

Для вычисления корня квадратного из полученного значения можно использовать функцию *КОРЕНЬ(...)* из категории *Математические*.

Далее, полученное значение корреляционного отношения следует интерпретировать по Таблице № 2.2. Для этого можно воспользоваться функцией *ЕСЛИ(...)* из категории *Логические*, возможности которой описаны выше.

### §3. Исследование функций

#### Задача нахождения корня функции

В бизнес-анализе задача решения уравнений носит фундаментальный характер, так как в самых различных математических методах предполагается нахождение корня или нуля функции.

Задача нахождения корня функции  $f(x)$  в общем случае может быть записана следующим образом:

$$f(x) = 0 \quad (3.1)$$

Возможность применения аналитических или численных методов для нахождения корня функции зависит от вида функции  $f(x)$ .

В 20-х годах XIX века норвежский математик Нильс Абель доказал, что для алгебраического уравнения

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0$$

при  $n \geq 5$  аналитического решения не существует. То есть, если функция  $f(x)$  является алгебраическим многочленом пятой и более высоких степеней, то не существует формулы для решения задачи  $f(x) = 0$ .

Решение задачи (3.1) еще больше усложняется, если функция  $f(x)$  является неалгебраической. В этом случае найти для корней явные выражения, как правило, не удастся.

В условиях, когда формулы «не работают», приходится применять численные методы решения уравнений.

Как правило, алгоритмы численного решения задачи (3.1) не накладывают никаких ограничений на конкретный вид функции  $f(x)$ , а только предполагают, что она обладает некоторыми свойствами, например, свойствами непрерывности, дифференцируемости и т. д. Кроме того, большинство численных методов предполагает нахождение только одного корня на заданном отрезке  $[a, b]$ , который является областью определения функции  $f(x)$ .

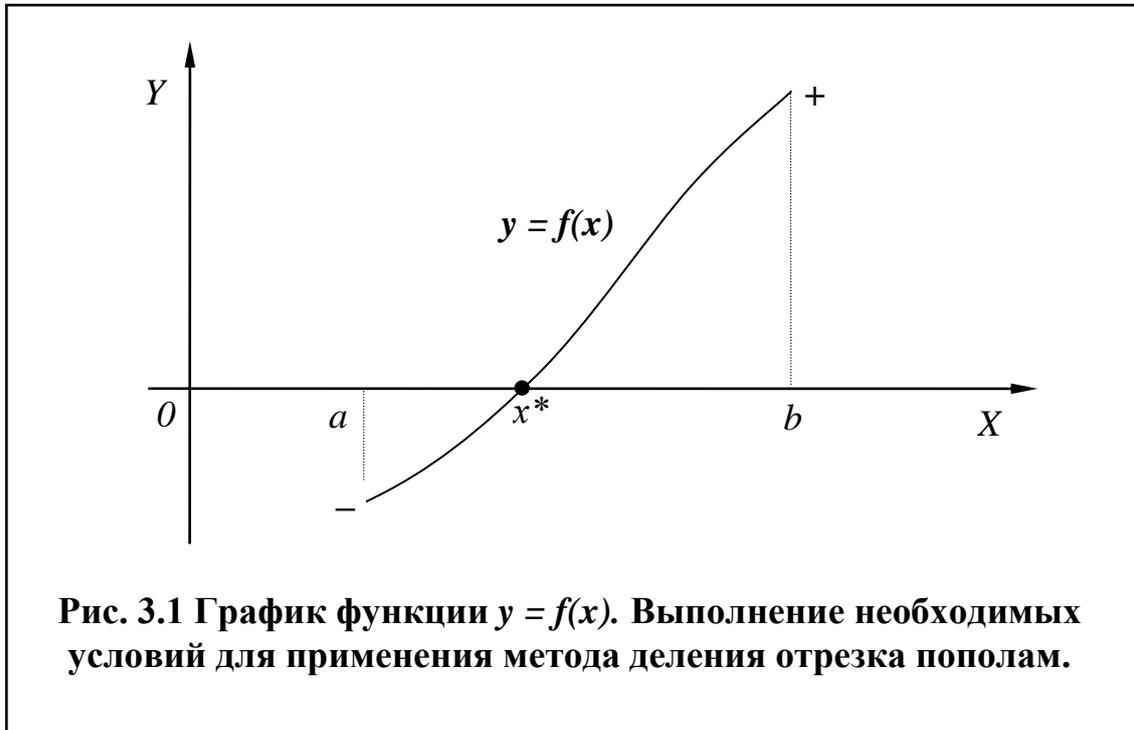
#### Численные методы решения уравнений

##### Метод деления отрезка пополам

Одним из простейших методов решения задачи (3.1), является метод деления отрезка пополам или метод «вилки», основанный на следующей теореме.

*Теорема о существовании корня у непрерывной функции:* если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и принимает на его концах значения разных знаков, то на этом отрезке существует, по крайней мере, один корень уравнения (3.1).

Доказательство данной теоремы становится очевидным, если рассмотреть рисунок 3.1. Непрерывная функция, имеющая на конце  $a$  отрицательное значение, а на конце  $b$  положительное значение обязательно пройдет через точку  $x^*$ , в которой она меняет свой знак на противоположный. Эта точка и является корнем уравнения (3.1).



Однако, гарантируя существование решения уравнения, теорема не позволяет определить точного числа его корней.

Требование непрерывности функции  $f(x)$  во всех точках отрезка  $[a, b]$  существенно, так как при наличии хотя бы одной точки разрыва утверждение теоремы становится неверным (см. Рис.3.2).

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , и принимает на его концах значения разных знаков, то есть  $f(a) \times f(b) < 0$ , а также имеет на данном отрезке только один корень.

Тогда имеет место следующий алгоритм:

1. Найдем середину отрезка  $[a, b]$  по формуле  $x = \frac{b + a}{2}$ .
2. Сравним знаки функции в точке  $x$  и на любом из концов отрезка: если  $f(x) \times f(a) > 0$ , то корень принадлежит отрезку  $[x, b]$ , и левую границу отрезка смещаем вправо:  $a = x$ . Иначе, корень принадлежит отрезку  $[a, x]$  и тогда  $b = x$ .
3. Далее, указанные вычисления повторяются: переходим на п. 1.



Таким образом, задаваемый указанным алгоритмом вычислительный процесс за  $n$  шагов выполнения п.1 и п.2 формирует последовательность вложенных отрезков:  $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n]$ , причем  $f(a) \times f(b) < 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ .

Следовательно, корень  $x^*$  всегда принадлежит отрезку  $[a_n, b_n]$ ,  $n=1,2,\dots$ , а приближенное решение задачи (3.1), в качестве которого на каждом шаге  $n=1,2,\dots$  процесса выступает значение  $x$  середины отрезка  $[a_n, b_n]$ , будет стремиться к точному решению  $x^*$ .

Неоднократное повторение какой-либо математической операции называется *итерационным процессом*, а каждый шаг этого процесса – *итерацией* (от лат. *iteration* – повторение).

Итерационный процесс является бесконечным в плане возможного уточнения решения задачи  $x^*$ . Поэтому необходимо определить критерий, на основе которого будет осуществляться остановка процесса. Таким критерием, очевидно, может являться величина погрешности, выражаемая в абсолютном или относительном отклонении приближенного решения  $x$ , полученного на очередном шаге итерационного процесса, от точного решения  $x^*$ :  $\Delta = |x - x^*|$  или  $\delta = \left| \frac{x - x^*}{x} \right|$ .

В данном случае величина погрешности  $\Delta$  будет зависеть от длины отрезка  $[a_n, b_n]$ ,  $n=1,2,\dots$ . Поэтому, в качестве критерия останова итерационного процесса выберем условие:  $b - a < \varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Точность вычислений зависит от значения  $\varepsilon$ , причем  $\Delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$

### Метод (простых) итераций

Пусть дано уравнение  $f(x) = 0$  (3.2)

Преобразуем его к виду  $x = \varphi(x)$  (3.3)

Выберем произвольное значение  $x_0$  из области определения функции  $\varphi(x)$  и построим последовательность чисел  $\{x_n\}$ , определенных с помощью *рекуррентной формулы*  $x_n = \varphi(x_{n-1})$ , (3.4)

где  $n$  – номер итерации,  $n=1,2,\dots$

*Рекуррентная формула* в общем случае может быть представлена следующим образом:  $x_n = f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ , где  $x_n$  – приближенное решение, найденное на  $n$ -м шаге итерационного процесса. В простейшем случае рекуррентная формула связывает два последовательно найденных приближенных решения задачи:  $x_n = f(x_{n-1})$ , где  $n = 1,2,\dots$  – номер итерации.

Последовательность  $\{x_n\}$  называется итерационной. При определенных ограничениях на функцию  $\varphi(x)$ , итерационная последовательность является бесконечной и сходится к корню уравнения (3.2):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*, \quad x^* = \varphi(x).$$

*Определение.* Функция  $g(x)$  является *сжимающим отображением* на отрезке  $[a, b]$ , если существует такая постоянная  $0 < \alpha < 1$ , что для любых двух точек  $x_1$  и  $x_2$ , принадлежащих отрезку  $[a, b]$ , имеет место неравенство:

$$|g(x_2) - g(x_1)| \leq \alpha \cdot |x_2 - x_1|. \quad (3.5)$$

Условие (3.5) называется, также, *условием Липшица*, а величина  $\alpha$  – *постоянной Липшица*.

Если функция  $g(x)$  является сжимающим отображением на отрезке  $[a, b]$ , то она *непрерывна* на этом отрезке. Действительно, пусть  $x_0$  – произвольная точка отрезка. Рассмотрим приращение функции  $g(x)$  в этой точке:  $\Delta g = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$ , и оценим его с помощью неравенства (3.5):  $|\Delta g| \leq \alpha |\Delta x|$ . (3.6)

Таким образом  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta g = 0$ , что означает непрерывность функции.

Если функция  $g(x)$  является сжимающим отображением на отрезке  $[a, b]$ , то она *дифференцируема* на этом отрезке, причем функция имеет ограничен-

ную производную  $|g'(x)| \leq \alpha < 1$ . Действительно, разделив обе части неравенства

(3.6) на  $|\Delta x|$  и, переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получим:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta g|}{|\Delta x|} = |g'(x)| \leq \alpha < 1$ .

С геометрической точки зрения условие (3.5) означает ограниченность тангенса угла наклона касательных, проведенных через всевозможные точки графика функции  $y = g(x)$ :  $|g'(x)| = |\operatorname{tg} \gamma| \leq \alpha < 1$ , где  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$ .

Метод итераций основан на следующей теореме:

*Теорема о сходимости итерационной последовательности.* Пусть  $x^*$  – корень уравнения (3.2) и пусть функция  $\varphi(x)$  является сжимающим отображением на отрезке  $[x^* - \delta, x^* + \delta]$ ,  $\delta > 0$ . Тогда, при любом выборе  $x_0$  на отрезке  $[x^* - \delta, x^* + \delta]$  существует бесконечная итерационная последовательность  $\{x_n\}$ , построенная по формуле (3.4), и эта последовательность сходится к корню уравнения  $x = x^*$ , который является единственным решением уравнения (3.2) на отрезке  $[x^* - \delta, x^* + \delta]$ .

При выполнении условий теоремы, *алгоритм метода итераций* может быть записан следующим образом:

1. Вводим  $x_0$  – начальное приближение,  $\varepsilon$  – точность вычислений ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) и функцию  $\varphi(x)$ .
2. Вычисляем  $x_1 = \varphi(x_0)$ .
3. Проверяем условие  $|x_1 - x_0| < \varepsilon$  – критерий остановки итерационного процесса. Если условие выполняется, то итерационный процесс завершаем, а в качестве корня функции  $f(x)$  принимаем значение  $x_1$ . Иначе, принимаем  $x_0 = x_1$  и переходим на п. 2.

Рассмотрим способ приведения уравнения (3.2) к виду (3.3).

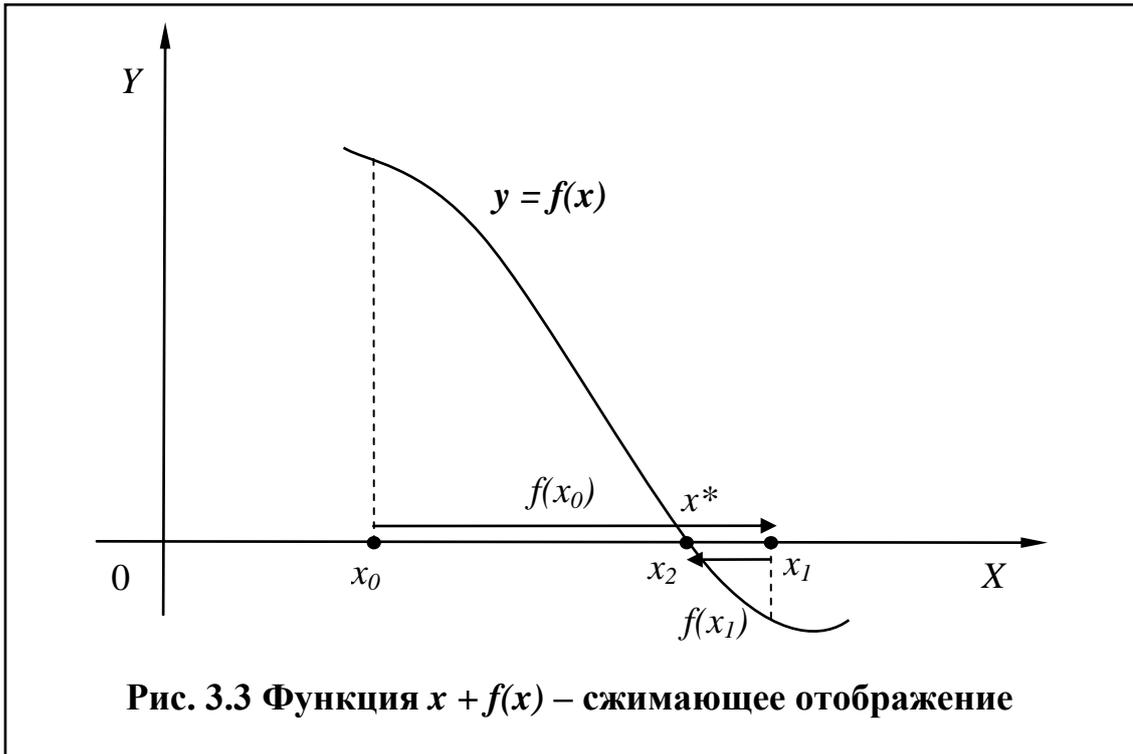
Умножим обе части  $f(x) = 0$  на некоторое число – параметр  $\lambda$  (о том, как выбрать  $\lambda$  будет сказано ниже) и прибавим к обеим частям  $x$ . Получаем:  $x = x + \lambda f(x)$ . Обозначив  $\varphi(x) = x + \lambda f(x)$ , получим  $x = \varphi(x)$  и  $x_n = \varphi(x_{n-1})$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Таким образом, в общем случае имеет место следующая рекуррентная формула:

$$x_n = x_{n-1} + \lambda \cdot f(x_{n-1}). \quad (3.7)$$

Теперь обратимся к вопросу выбора параметра  $\lambda$ .

Пусть функция  $f(x)$  на отрезке  $[x^* - \delta, x^* + \delta]$  монотонно убывает (см. Рис.3.3).



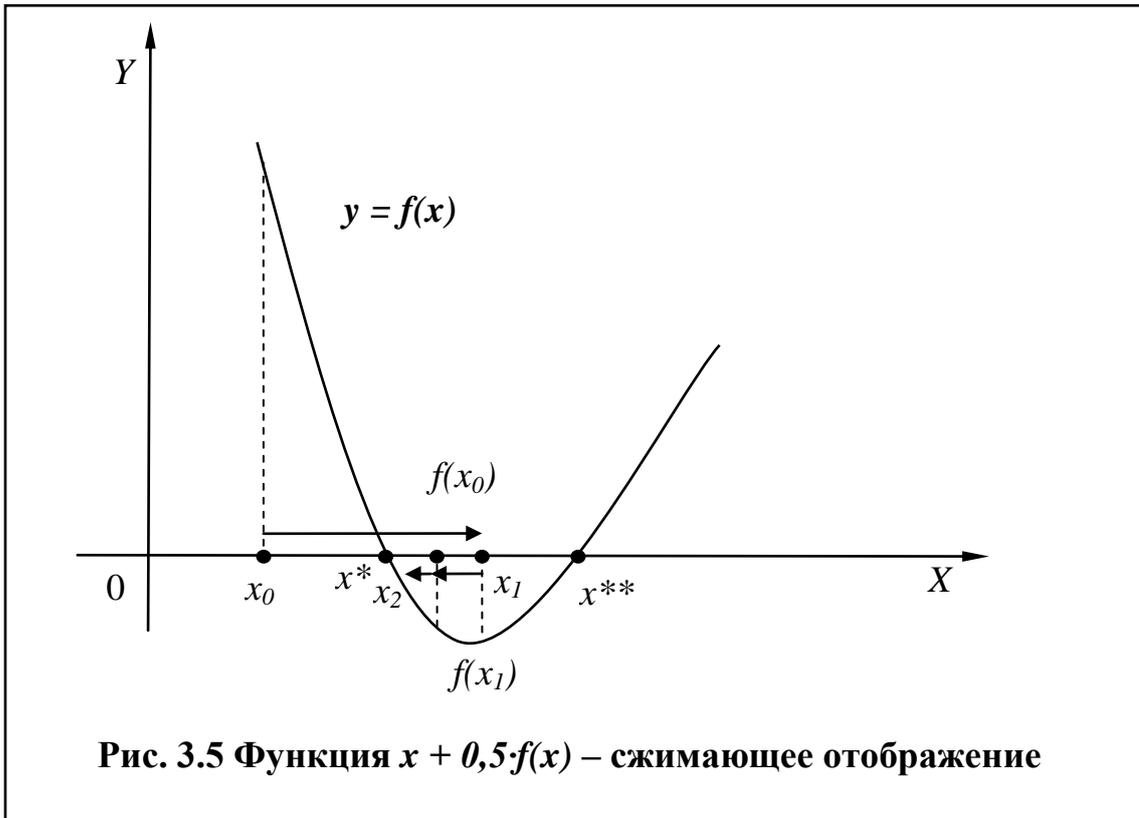
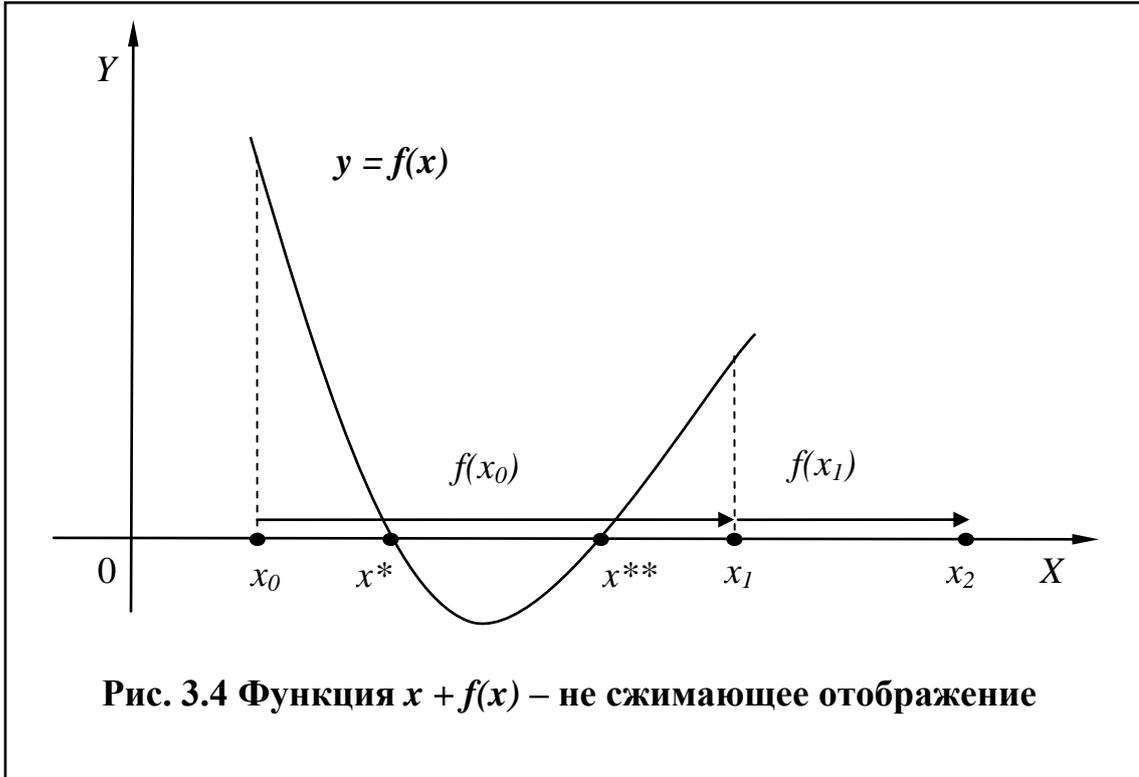
Примем, что  $\lambda = 1$ .

Выберем начальное приближение  $x_0 \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$ , например, слева от точки  $x^*$ . Задав начальное приближение  $x_0$ , подставляем его значение в правую часть рекуррентной формулы (3.7). Получим значение нового приближения  $x_1$ :  $x_1 = x_0 + f(x_0)$ .

Подставляя в формулу (3.7) значение  $x_1$ , находим  $x_2$ , и т. д.

Если функция монотонно возрастает, то используя формулу  $x_n = x_{n-1} + f(x_{n-1})$  будем перемещаться в направлении от  $x^*$ . Соответственно, в этом случае принимаем  $\lambda = -1$ .

В приведенном примере функция  $\varphi(x) = x + f(x)$  являлась сжимающим отображением на отрезке  $[x^* - \delta, x^* + \delta]$ . Далее, рассмотрим ситуацию, когда функция не является сжимающим отображением (см. Рис.3.4).



Как видно из рисунка 3.4, приняв  $\lambda = 1$ , мы покидаем не только окрестность точки  $x^*$ , но и окрестность расположенного справа от нее второго корня функции  $f(x)$  – точки  $x^{**}$ . Приняв же,  $\lambda = 0,5$ , получим совсем иную итерационную последовательность (см. Рис.3.5).

Следовательно, с помощью параметра  $\lambda$  учитывается изменения знака функции  $f(x)$  при переходе ее графика через нуль функции – от «+» к «-» или от «-» к «+», и масштабирование значений  $f(x_n)$ , обеспечивая, таким образом, для функции  $\varphi(x)$  выполнения условия сжимающего отображения. Параметр  $\lambda$  называется *шагом процесса*.

На практике, в зависимости от уровня наших знаний о поведении функции  $f(x)$  в окрестности точного решения  $x^*$ , значение параметра можно определять следующим образом:

1.  $\lambda = const$ .
2.  $\lambda = \lambda(n)$  – параметр является функцией от номера шага итерации. Например,
 
$$\lambda = \frac{1}{1+n}.$$
3.  $\lambda = \lambda(x)$  – параметр является функцией от аргумента  $x$ . Здесь имеют место *частные случаи метода простой итерации*, основные из которых мы рассмотрим ниже.

### Метод секущих

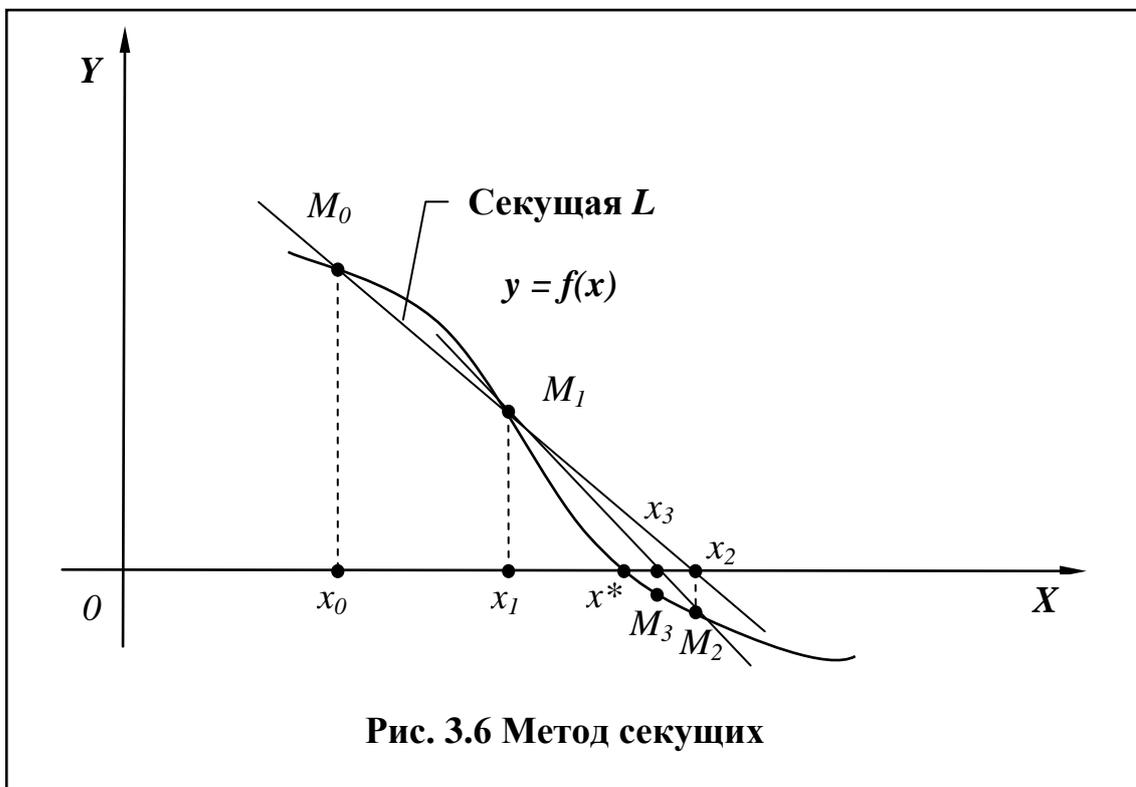


Рис. 3.6 Метод секущих

Выполним аппроксимацию функции  $f(x)$  в окрестности  $[x^*-\delta, x^*+\delta]$  точного решения  $x^*$  (см. Рис.3.6): выберем два начальных приближения  $x_0, x_1 \in [x^*-\delta, x^*+\delta]$  и за-

меним кривую  $y = f(x)$  на прямую  $L$  – секущую, проходящую через точки  $M_1$  и  $M_2$  графика функции  $y = f(x)$ .

Уравнение прямой  $L$  имеет вид:  $y = y_1 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_1)$ .

Тогда в точке  $x = x_2$ , которая является приближенным решением задачи (3.2) имеем:

$$y_1 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x_2 - x_1) = 0 \text{ и } x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} \cdot y_1.$$

Аналогично, имеем  $x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \cdot y_2$ . Тогда в общем случае рекуррентная формула метода секущих имеет следующий вид:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{y_{n-1} - y_{n-2}} \cdot y_{n-1}, \quad (3.8)$$

где  $n = 2, 3, \dots$  – номер итерации.

Очевидно, что в этом случае параметр  $\lambda(x_{n-1}) = -\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{y_{n-1} - y_{n-2}}$ .

### Метод касательных (Ньютона)

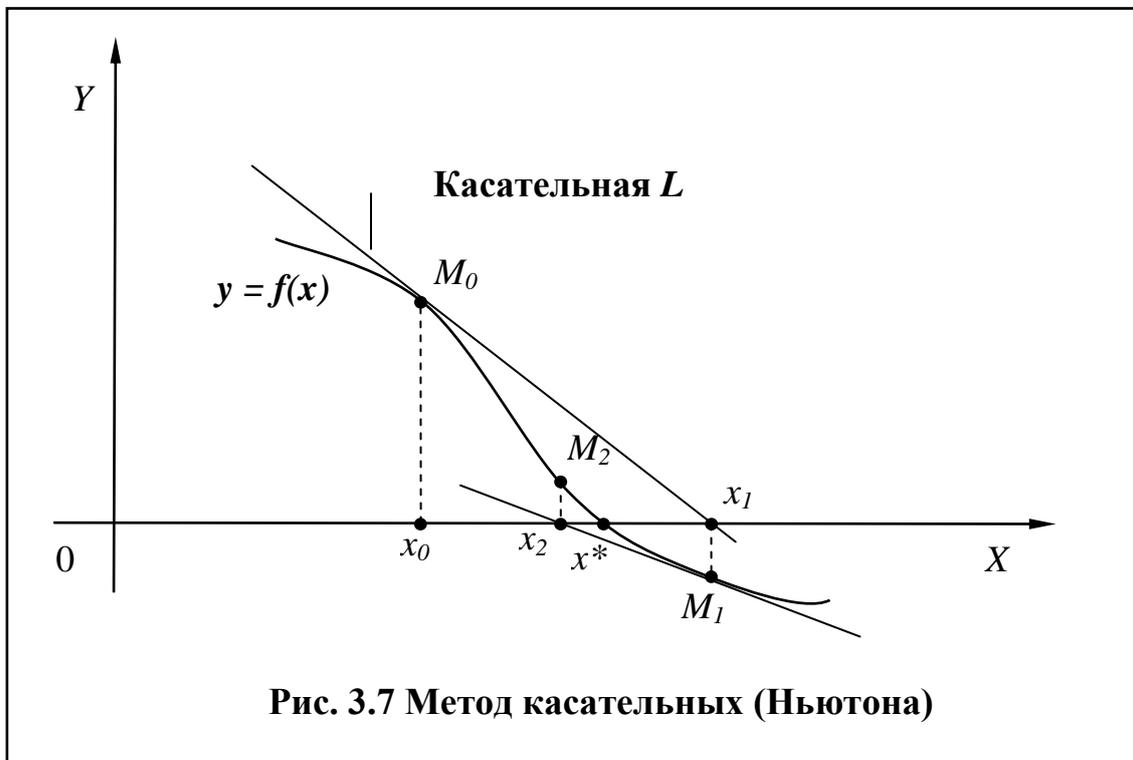


Рис. 3.7 Метод касательных (Ньютона)

Введем обозначения:  $\Delta x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2}$ ,  $\Delta y_{n-1} = y_{n-1} - y_{n-2}$ .

Тогда,  $\lambda(x_{n-1}) = -\frac{\Delta x_{n-1}}{\Delta y_{n-1}} = -\frac{1}{\Delta y_{n-1} / \Delta x_{n-1}}$ . Переходя к пределу при  $\Delta x_{n-1} \rightarrow 0$ , будем

иметь:

$$\lim_{\Delta x_{n-1} \rightarrow 0} - \frac{1}{\Delta y_{n-1} / \Delta x_{n-1}} = - \frac{1}{y'_{n-1}} \quad \text{и} \quad x_n = x_{n-1} - \frac{1}{y'_{n-1}} \cdot y_{n-1}, \quad (3.9)$$

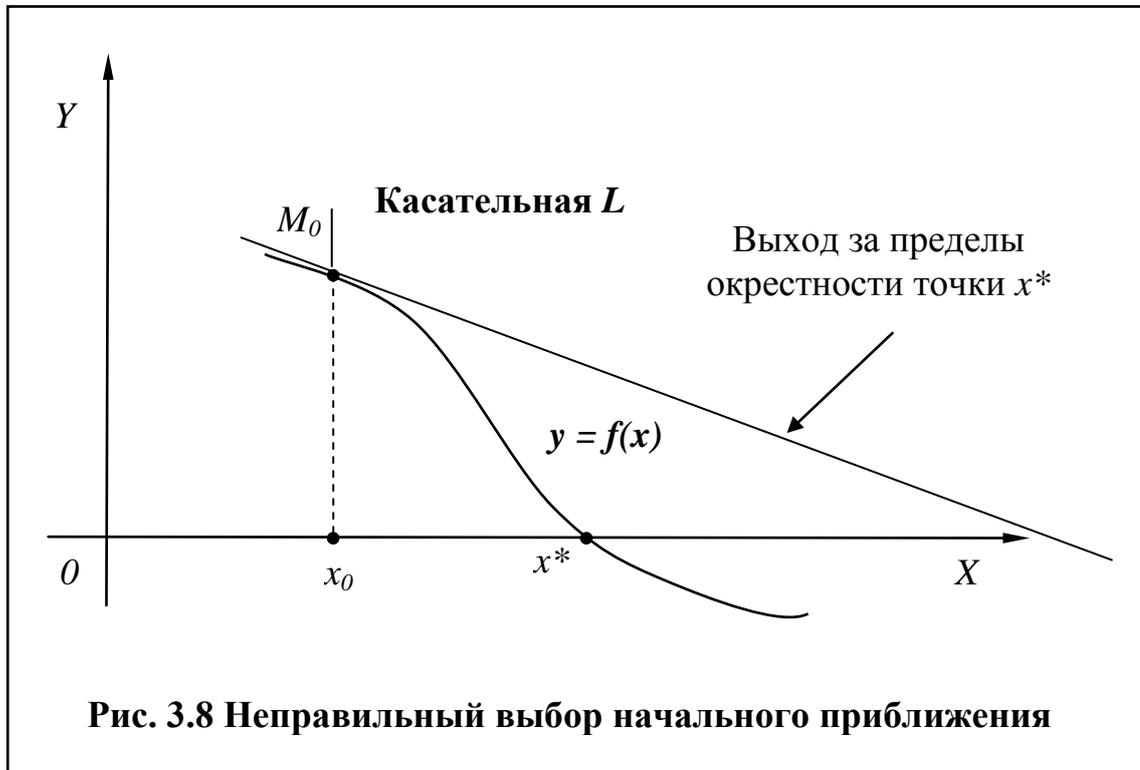
где  $n = 1, 2, \dots$  – номер итерации.

Рекуррентная формула (3.9) называется *формулой Ньютона*. Геометрически, использование формулы (3.9) вместо формулы (3.8) означает, что вместо секущей для аппроксимации функции используется *касательная* к графику функции  $y = f(x)$  (см. Рис.3.7).

В отличие от метода секущих, метод касательных требует задания только одного начального приближения  $x_0$ . В то же время чаще всего производную функции  $f(x)$  приходится задавать приближенно, с использованием формул

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad f'(x) \approx \frac{f(x - \Delta x) - f(x + \Delta x)}{2 \cdot \Delta x} \quad (3.10)$$

В рассмотренных методах важно правильно выбрать начальное приближение  $x_0$  ( $x_1$ ), иначе сходимость итерационной последовательности к точному решению не обеспечивается (см. Рис.3.8).



### Задача нахождения корня функции численными методами

Функция  $y = f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Используя приведенные выше численные методы решения уравнений найти корень  $x^*$  функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Построить таблицу значений и график функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  с шагом табуляции  $h = 0,1$ .

№ п/п	$y = f(x)$	$[a, b]$	$x^*$
1.	$y = x^2 \cos 2x + 1$	$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$	1,1832
2.	$y = x^5 - 0,3/x - 1/$	$[0; 1]$	0,6409
3.	$y = 2x - \cos x$	$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$	0,4502
4.	$y = 0,9x - \sin \sqrt{x} - 0,1$	$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$	1,0647
5.	$y = \operatorname{tg} x - \frac{x+1}{2}$	$\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$	0,7062
6.	$y = x^2 - 2 - \sin x$	$[1; 3]$	1,7283
7.	$y = \cos 3x - 6x^3$	$[-1; 1]$	0,3962
8.	$y = \sin x \cos x - x$	$[-2; 1]$	-0,0893
9.	$y = x^3 - 2x + \cos x$	$[0; 1]$	0,5015
10.	$y = \sqrt{ x } - \sin x - 1$	$[2; 3]$	2,5154

### Выполнение задачи в *Microsoft Excel*

1. Ввести исходные данные – начало отрезка  $a$ , конец отрезка  $b$ , шаг табуляции  $h$ .
2. Построить таблицу значений функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  с шагом табуляции  $h$  по следующему правилу:

$$x_0 = a; \quad x_i = x_{i-1} + h \quad \text{для } i=1, 2, \dots, n$$

$$y_i = f(x_i) \quad \text{для } i=0, 1, 2, \dots, n.$$

Для получения значений  $x_i$  следует предварительно записать в первую ячейку, предназначенную для значений  $x_i$ , формулу  $x_0 = a$ . Далее в следующую за ней смежную ячейку таблицы записать рекуррентную формулу  $x_i = x_{i-1} + h$  для  $i=1$  и скопировать эту формулу в смежные ячейки таблицы для оставшихся значений  $i=2, \dots, n$ .

*Замечание:* Перед копированием формулы для вычисления значений аргументов функции  $x_i = x_{i-1} + h$  для  $i=1, 2, \dots, n$  следует в этой формуле ссылку на ячейку, в которой находится шаг табуляции  $h$ , зафиксировать (то есть вызвать абсолютную

или смешанную ссылку), так как шаг табуляции  $h$  величина постоянная для всей таблицы и при копировании формулы, адрес ячейки, в которой он находится, меняться не должен.

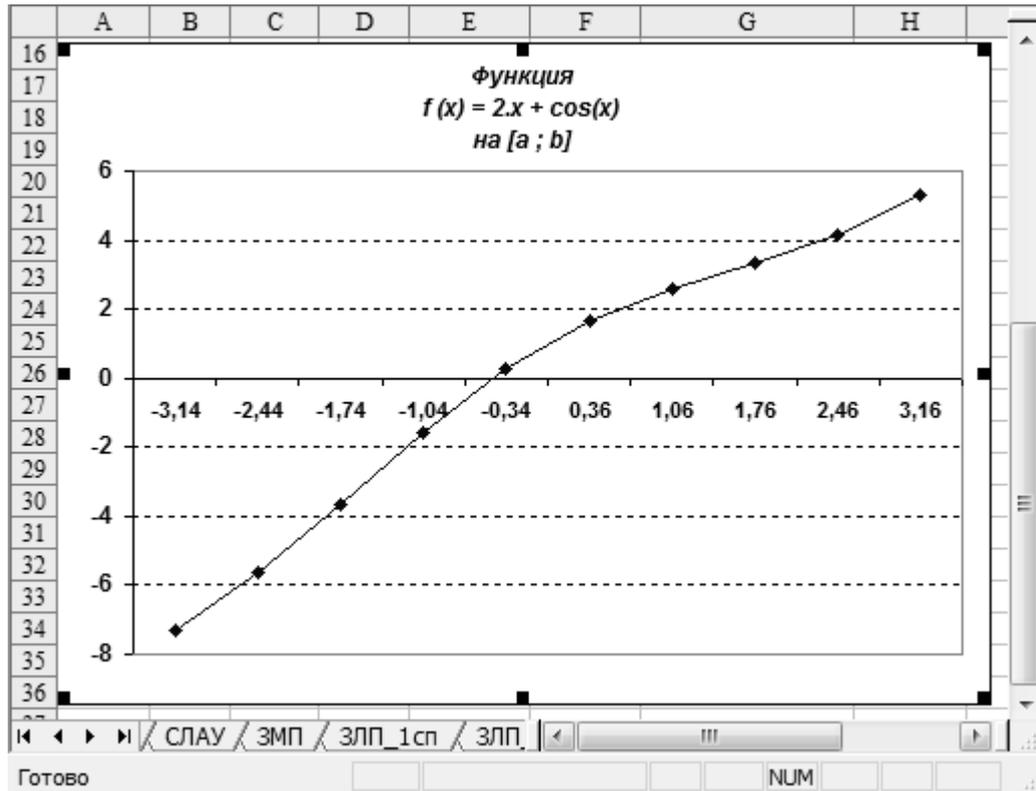
Для получения значений  $y_i$  следует предварительно записать в первую ячейку, предназначенную для значений  $y_i$ , формулу  $y_i = f(x_i)$  для  $i=0$  и скопировать эту формулу в смежные ячейки таблицы для оставшихся значений  $i=1, 2, \dots, n$  (см. Рис.3.9).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>Поиск корня уравнения на заданном отрезке</b>							
2	<b>Исходные данные</b>				<b>x</b>		<b>Функция</b> $f(x) = 2 \cdot x + \cos(x)$ на [a ; b]	
3	a=	-3,14		$x_0$	-3,14	$y_0$	=2*E3+COS(E3)	
4	b=	3,14		$x_1$	=E3+\$B\$5	$y_1$	-5,65	
5	h=	0,7		$x_2$	-1,74	$y_2$	-3,65	
6				$x_3$	-1,04	$y_3$	-1,58	
7				$x_4$	-0,34	$y_4$	0,26	
8				$x_5$	0,36	$y_5$	1,65	
9				$x_6$	1,06	$y_6$	2,61	
10				$x_7$	1,76	$y_7$	3,33	
11				$x_8$	2,46	$y_8$	4,14	
12				$x_9$	3,16	$y_9$	5,32	
13	<b>Корень уравнения <math>X_0 =</math></b>				-0,45026	<b><math>f(X_0) =</math></b>	-0,00019	
14	<b>Конец таблицы <math>Y_0 =</math></b>				0,45017	<b><math>f(Y_0) =</math></b>	0,00003	

**Рис. 3.9** Построение значений  $x_i$  и  $y_i$

3. Построить график функции  $y = f(x)$  по полученным табличным значениям с помощью *Мастера диаграмм*. Тип диаграммы можно выбрать *График с маркерами....* В качестве подписей по оси *OX* использовать полученные табличные значения  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

При построении графика функции по полученным табличным значениям можно также использовать и тип диаграммы *Точечная*. Для ее построения предварительно необходимо выделить сразу два столбца с исходными данными – и столбец со значениями  $x_0, x_1, \dots, x_n$  и столбец со значениями  $y_0, y_1, \dots, y_n$ .



**Рис. 3.10** График функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$

4. На основе изучения графика функции  $y = f(x)$  задать в ячейке начальное приближение решения задачи, которое должно находиться в окрестности корня функции  $x^*$ .

В данном случае, в качестве начального приближения для корня можно взять значение  $-1,74$  (значение, находящееся слева от корня), или значение  $0,36$  (значение, находящееся справа от корня).

5. Далее следует вычислить значение функции  $f(x^*)$  в заданной точке  $x^*$ , то есть записать в ячейке формулу:  $=2x^* \cos(x^*)$  (см. Рис.3.11).

6. Перейти к поиску корня уравнения, то есть к решению задачи  $f(x^*)=0$ . Для чего следует выбрать вкладку *Данные* → группу *Работа с данными* → кнопку с раскрывающимся списком *Анализ что если* → команду *Подбор параметра...* В результате загрузится окно диалога *Подбор параметра* (см. Рис.3.12), в котором:

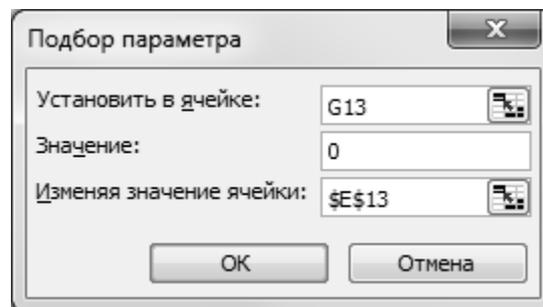
- в окне поля ввода *Установить в ячейке:* ввести ссылку на ячейку, в которой записана функция  $y = f(x^*)$ ;
- в окне поля ввода *Значение:* ввести значение 0;
- в окне поля ввода *Изменяя значение ячейки:* ввести ссылку на ячейку, в которой находится значение начального приближения корня  $x^*$ ;
- Выбрать кнопку  или нажать клавишу *Enter*.

- В результате загрузится окно диалога *Результат подбора параметра*, в котором будет выведено соответствующее сообщение о результате поиска подходящего решения – *Решение найдено* (см. Рис.3.13) или *Решение не найдено* (см. Рис.3.14).

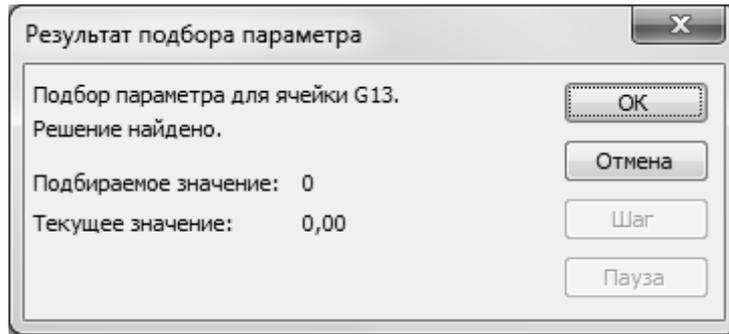
В случае, если *Решение найдено*, в таблицу с расчетами на рабочий лист вместо начального приближения  $x^*$  будет записано найденное значение корня уравнения, а значение функции в этой точке станет равным нулю:  $f(x^*) = 0$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	<b>Поиск корня уравнения на заданном отрезке</b>							
2	<b>Исходные данные</b>			<b>x</b>		<b>Функция</b> $f(x) = 2 \cdot x + \cos(x)$ на [a ; b]		
3	a=	-3,14		$x_0$	-3,14	$y_0$	-7,28	
4	b=	3,14		$x_1$	-2,44	$y_1$	-5,65	
5	h=	0,7		$x_2$	-1,74	$y_2$	-3,65	
6				$x_3$	-1,04	$y_3$	-1,58	
7				$x_4$	-0,34	$y_4$	0,26	
8				$x_5$	0,36	$y_5$	1,65	
9				$x_6$	1,06	$y_6$	2,61	
10				$x_7$	1,76	$y_7$	3,33	
11				$x_8$	2,46	$y_8$	4,14	
12				$x_9$	3,16	$y_9$	5,32	
13	Корень уравнения $x^* =$				-1,74	$f(x^*) =$	$=2 \cdot E13 + \text{COS}(E13)$	
14	Корень уравнения $x^* =$				0,36	$f(x^*) =$	1,65590	

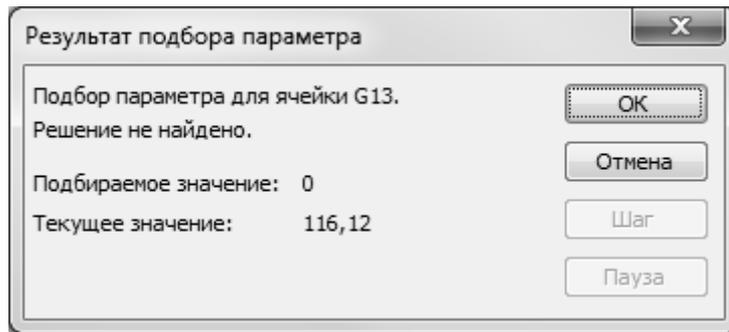
**Рис. 3.11** Вычисление  $y = f(x)$  в точке  $x^*$



**Рис. 3.12** Окно диалога *Подбор параметра*



**Рис. 3.13** Окно диалога *Результат подбора параметра: решение найдено*



**Рис. 3.14** Окно диалога *Результат подбора параметра: решение не найдено*

Например, до вызова модуля *Подбор параметра*:

<b>Корень уравнения <math>x^* =</math></b> (значение начального приближения корня - взято слева от корня)	-1,74	$f(x^*) =$	-3,65
<b>Корень уравнения <math>x^* =</math></b> (значение начального приближения корня - взято справа от корня)	0,36	$f(x^*) =$	1,66

После вызова модуля *Подбор параметра*:

<b>Корень уравнения <math>x^* =</math></b> (значение начального приближения корня - взято слева от корня)	-0,45026	$f(x^*) =$	-0,00019
<b>Корень уравнения <math>x^* =</math></b> (значение начального приближения корня - взято справа от корня)	-0,45017	$f(x^*) =$	0,00003

## Задача оптимизации

При принятии решений по различным вопросам бизнеса возникает необходимость в поиске наилучшей альтернативы с точки зрения намеченной цели, выбранного критерия, в нахождении таких значений показателей, которые будут соответствовать наилучшему в каком-то смысле состоянию объекта управления. Данная задача бизнес-анализа называется *задача оптимизации*.

При существенном разнообразии задач оптимизации только математика может дать общие методы их решения. Однако для того, чтобы воспользоваться математическим аппаратом, необходимо сначала сформулировать интересующую нас проблему как математическую задачу, придав количественные оценки возможным альтернативам, количественный смысл словам «лучше» и «хуже».

С математической точки зрения решение задачи оптимизации сводится к отысканию *точки экстремума*  $x^*$  – значения аргумента функции  $f(x)$ , которое обеспечит *экстремум* (*минимум* или *максимум*, то есть наименьшее или наибольшее значение) данной функции. При этом функция  $f(x)$  называется *целевой функцией* или *критерием оптимальности*.

В общем случае задача оптимизации может быть записана следующим образом:

$$f(x) \rightarrow \text{extr} = \begin{cases} \min \\ \max \end{cases} \quad (3.11)$$

При этом функция  $f(x)$  может являться функцией одной или нескольких переменных. В первом случае говорят об *одномерной*, а во втором – о *многомерной* оптимизации.

Задача (3.11) может решаться на всей области определения функции  $f(x)$  или же может быть дополнена одним или несколькими ограничениями на значения аргумента функции. В первом случае говорят о *безусловной*, а во втором – об *условной* оптимизации.

Обычно ограничения задачи представлены множеством соотношений вида:

$$g_i(x) \begin{cases} \leq \\ \geq \\ = \end{cases} b_i, \text{ где } g_i(x) \text{ – некоторые функции, а } b_i \text{ – константы, } i=1, \dots, m.$$

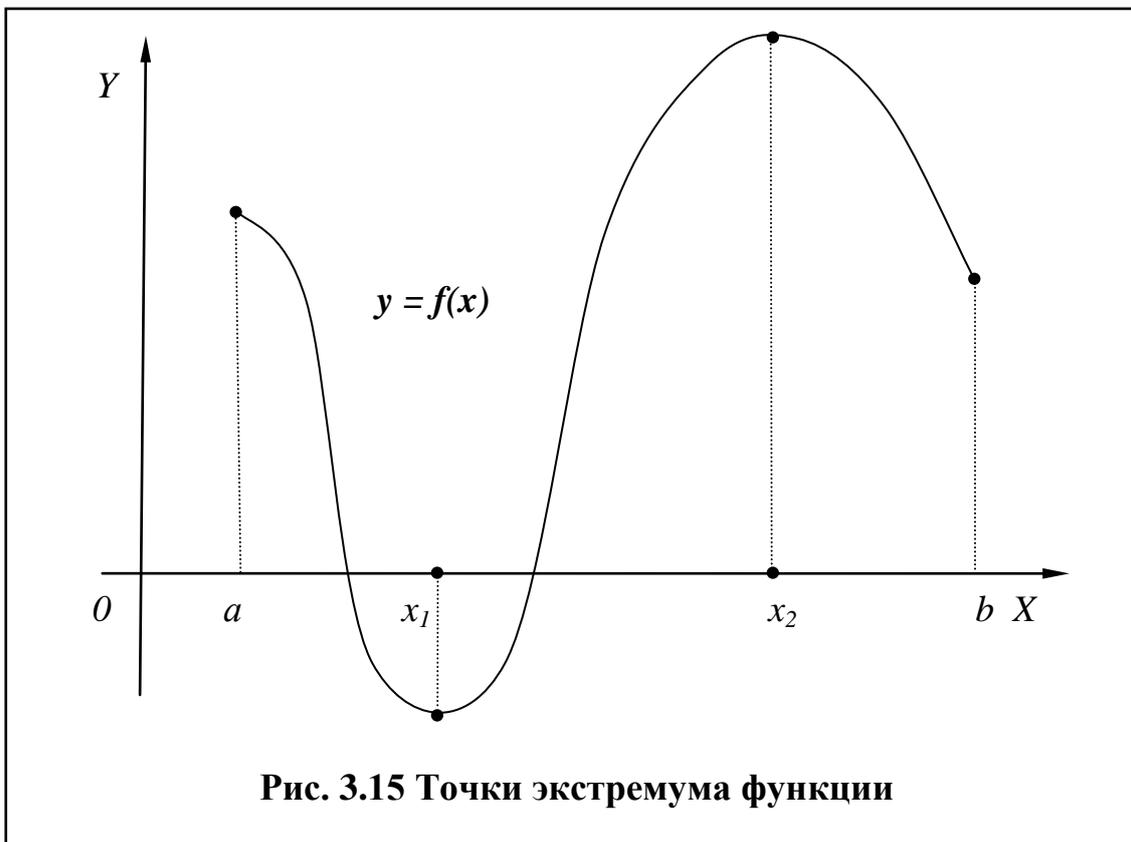
Кроме того, самих критериев может быть как один, так и несколько. Соответственно говорят об *однокритериальной* или о *многокритериальной* задаче оптимизации.

В зависимости от конкретной задачи оптимизации могут применяться, как аналитические, так и численные методы ее решения. Применение методов оптимизации основано на следующей теореме:

*Теорема Вейерштрасса.* Функция  $f(x)$ , непрерывная на отрезке  $[a, b]$  принимает на этом отрезке свое наименьшее и наибольшее значения, то есть на отрезке  $[a, b]$  существуют такие точки  $x_1$  и  $x_2$ , что для любого  $x \in [a, b]$  выполняются неравенства  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ .

Не исключается, в частности, возможность того, что наименьшее или наибольшее значение достигается сразу в нескольких точках.

При этом  $x_1$  называется *точкой минимума*, а  $x_2$  – *точкой максимума* функции  $f(x)$  (см. Рис.3.15).



Если отрезок  $[a, b]$  совпадает с областью определения функции  $f(x)$ , то говорят о *глобальном* экстремуме функции и соответствующих точках глобального минимума и максимума. Иначе экстремум носит *локальный* характер. Большинство как аналитических, так и численных методов оптимизации позволяет найти только один локальный экстремум функции и определить соответствующую точку экстремума.

Теорема Вейерштрасса играет роль теоремы существования, так как задача оптимизации, в которой целевая функция  $f(x)$  задана и непрерывна на отрезке, всегда имеет решение.

Так как на практике приходится решать самые разнообразные по степени своей сложности задачи оптимизации, в которых и критерий и ограничения задаются различного вида функциями, то в большинстве случаев используются именно численные методы решения задачи (3.11).

Рассмотрим численные методы *одномерной безусловной оптимизации*. Будем искать локальный экстремум функции  $f(x)$  и соответствующую точку экстремума  $x^*$  на отрезке  $[a, b]$ :

$$f(x) \rightarrow \text{extr}, x \in [a, b] \quad (3.12)$$

## Численные методы одномерной оптимизации

### Метод градиентов

Наиболее просты с математической точки зрения случаи, когда целевая функция задается явной формулой и является при этом дифференцируемой функцией. Итак, предположим, что целевая функция  $f(x)$  дифференцируема на отрезке  $[a, b]$  и имеется возможность найти явное выражение для ее производной  $f'(x)$ .

Имеет место *достаточное условие* экстремума функции:

*Теорема.* Если для дифференцируемой функции  $f(x)$  в некоторой точке  $x^*$  ее первая производная  $f'(x^*)$  равна нулю, а вторая производная  $f''(x^*)$  существует и отлична от нуля, то есть. если  $f'(x^*) = 0, f''(x^*) \neq 0$ , то в этой точке функция  $f(x^*)$  имеет экстремум, а именно:

если  $f''(x^*) > 0$ , то  $f(x^*)$  – минимум функции, и

если  $f''(x^*) < 0$ , то  $f(x^*)$  – максимум функции  $f(x)$ .

*Необходимым условием* существования экстремума дифференцируемой функции в точке  $x^*$ , является равенство нулю ее производной:  $f'(x^*) = 0$ .

Точки, в которых производная обращается в нуль, называются *критическими* или *стационарными* точками функции  $f(x)$ .

Если интерпретировать производную как скорость изменения функции, то в критических точках эта скорость равна нулю, изменение функции на мгновение «останавливается».

Функция  $f(x)$  может достигать своего наименьшего (наибольшего) значения либо в одной из двух граничных точек отрезка  $[a, b]$ , либо в какой-нибудь его внутренней точке. В последнем случае такая точка обязательно является *критической*.

Таким образом, можно сформулировать следующее *правило решения задачи оптимизации для класса дифференцируемых функций*: чтобы определить наибольшее

(наименьшее) значение дифференцируемой функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  нужно на данном отрезке найти все ее критические точки, присоединить к ним граничные точки  $a$  и  $b$ , а затем во всех этих точках сравнить значения функции. Наибольшее (наименьшее) из них и даст максимум (минимум) функции для всего отрезка.

Поскольку граничные точки  $a$  и  $b$  искать не нужно, то с технической точки зрения все сводится к определению критических точек, которые являются корнями уравнения

$$f'(x) = 0, \quad x \in [a, b] \quad (3.13)$$

Таким образом, задача (3.12) свелась к задаче (3.13), которую можно решить либо аналитически, либо рассмотренными выше численными методами решения уравнений. В частности, если применить метод итераций к уравнению (3.13), то мы получим одномерный случай *метода градиентов* для определения экстремального значения функции.

Задав начальное приближение  $x_0 \in [a, b]$ , вычисления производятся по рекуррентной формуле:

$$x_n = x_{n-1} + \lambda \cdot f'(x_{n-1}), \quad (3.14)$$

где  $n=1, 2, \dots$  – номер шага итерации, до тех пор, пока не выполнится условие  $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Здесь параметр  $\lambda$  и точность вычислений  $\varepsilon$  выбираются аналогично тому, как это делается в методе итераций.

Чтобы обеспечить универсальный характер метода градиентов и не вычислять каждый раз производные различных функций, можно воспользоваться формулами приближенного вычисления производной функции (3.10).

### Метод сканирования отрезка

В условиях недостаточной информации о функции  $f(x)$ , например, если функция задана таблично, следует использовать *метод сканирования отрезка*.

Метод сканирования можно применять и в тех случаях, когда другие методы применить невозможно, например, если для исходной функции  $f(x)$ , заданной на отрезке  $[a, b]$ , производная  $f'(x)$  на данном отрезке не определена. Скажем, функция

$f(x) = \sqrt{x}$  определена на отрезке  $[0, 1]$ , но  $f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$  не определена в точке 0.

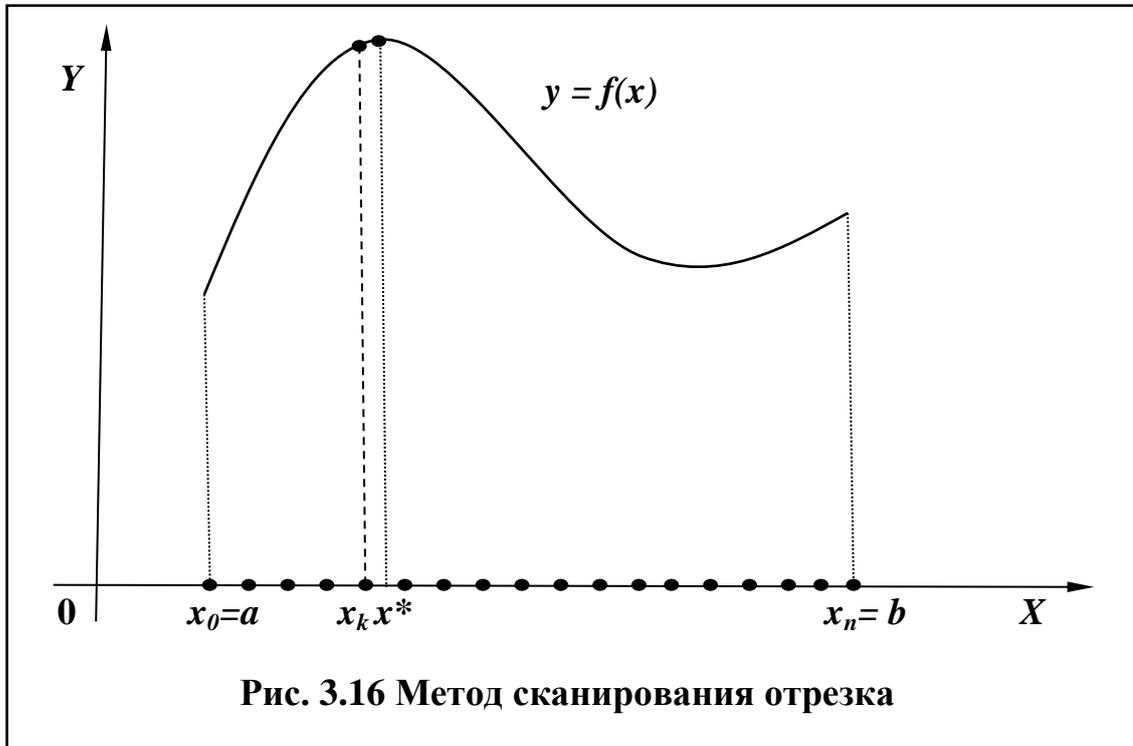
Пусть произвольная функция  $f(x)$  задана на отрезке  $[a, b]$  либо аналитически, либо таблично. Требуется решить задачу (3.12).

Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  элементарных отрезков равной длины  $h$  (см. Рис.3.16).

Получим  $n + 1$  точку – *узлы разбиения* отрезка  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ , в которых вы-

числим значение функции  $f(x)$ . Далее, выберем то значение функции  $f(x_k)$  и, соответственно, тот узел разбиения  $x_k$ ,  $k \in \{0, \dots, n\}$ , для которого выполняется условие

$$f(x_k) = \underset{i=0, \dots, n}{extr} \{ f(x_i) \} \quad (3.15)$$



**Рис. 3.16** Метод сканирования отрезка

Таким образом, с точностью, не превышающей значение  $h$ , находим приближенное решение задачи (3.12): экстремум функции  $f(x_k)$  и соответствующую точку экстремума  $x_k$ .

Если функция задана таблично, то выбор экстремума функции и точки экстремума осуществляется на основе табличных значений  $(x_i, y_i)$ ,  $i=0, \dots, n$ .

Данный метод достаточно прост и может применяться в случае многомерной оптимизации, когда функция  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  определена в  $m$ -мерной области. В этом случае область покрывается сеткой с шагом  $h$ , а затем вычисляются значения функции в узлах сетки. Затем среди полученных значений функции  $f(x)$  в узлах сетки выбирается экстремальное значение, которое и принимается за ее приближенный экстремум, а соответствующий узел сетки – за точку экстремума функции.

При этом объем вычислений сильно увеличивается. Так, если функция трех переменных  $f = f(x_1, x_2, x_3)$  определена на кубе, каждую сторону которого разбили на 99 частей, то тогда получим  $100^3$  узлов сетки или 1 млн. вычислений значения функции и проверок (сравнений на экстремум). Очевидно, что такой объем расчетов возможно осуществить только с применением компьютера.

### *Оптимальное управление закупками товара*

Как известно, закупочная деятельность предприятия связана с издержками. Издержки возникают в связи с организацией закупок товаров, их доставкой на склад предприятия, обработкой и последующим хранением. При этом слишком высокий уровень товарных запасов, которые являются наименее ликвидными активами предприятия, могут привести к ухудшению его финансового состояния и снижению уровня конкурентоспособности предприятия на рынке. С другой стороны слишком низкий уровень товарных запасов может привести к издержкам дефицита, которые, также негативно сказываются на уровне конкурентоспособности предприятия.

Таким образом, задача управления закупками, а именно – выбор оптимального уровня товарных запасов и соответствующих параметров закупок, является важнейшей задачей оптимизации, которая должна решаться на любом как торговом, так и производственном предприятии.

Выбор критерия оптимальности зависит от целей бизнеса. В простейшем случае в качестве критерия может быть выбрана функция издержек, связанных с закупками. Рассмотрим соответствующую модель управления товарными запасами.

Пусть предприятие торговли осуществляет реализацию некоторого товара в объеме  $v$  единиц в расчете на день продаж. Величина  $v$  – это *параметр модели*, определяющий *интенсивность* реализации товара. Закупка товара на склад для обеспечения продаж осуществляется следующим образом: товар закупается в объеме  $q$  единиц и реализуются в течение *цикла закупки* в  $\tau$  дней, то есть

$$q = v \cdot \tau. \quad (3.16)$$

В день, когда на складе больше не остается товара, осуществляется поставка новой партии в количестве  $q$  единиц и т. д. График зависимости уровня запасов  $Q$  от времени  $t$  представлен на рисунке 3.17.

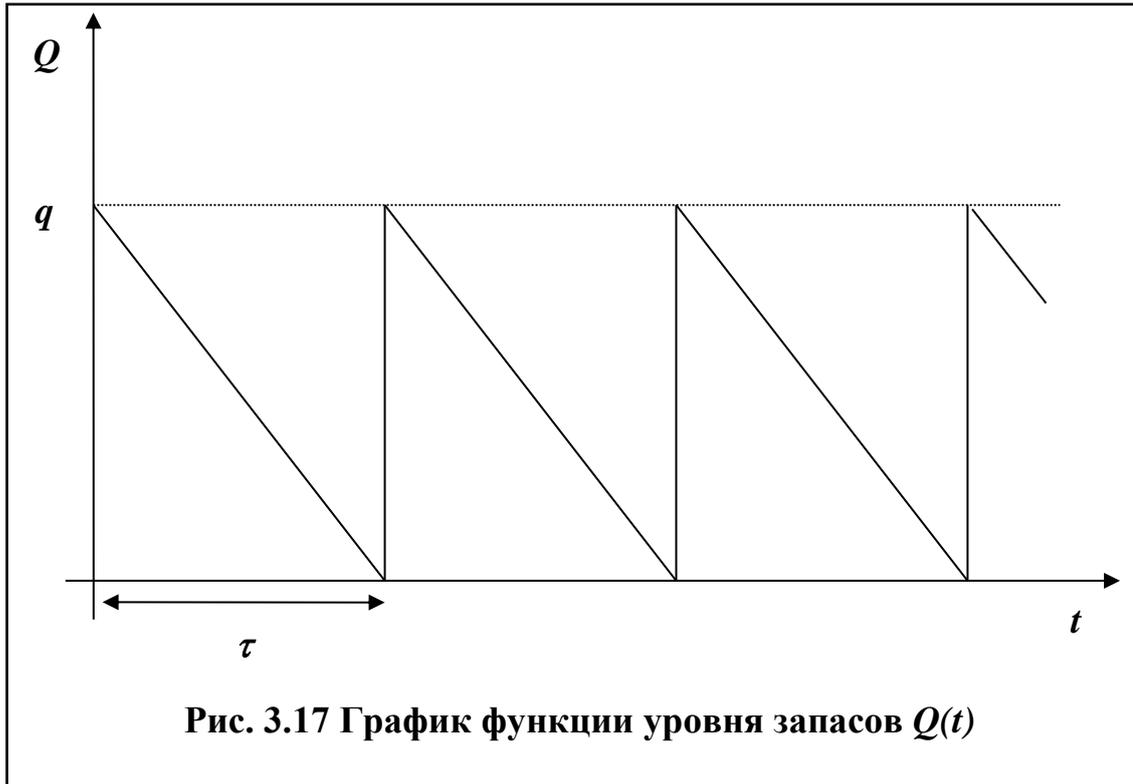
Далее, зададим параметры модели, связанные с издержками закупочной деятельности:

$K$  – постоянные издержки (у. е.), возникающие в течение цикла закупки;

$s$  – переменные издержки (у. е.), связанные с хранением единицы товара в течение дня.

Таким образом, общие издержки  $C$ , связанные с одним циклом закупки определяются по формуле

$$C_{\tau}( \tau, q ) = K + \frac{q \cdot \tau \cdot s}{2}.$$



**Рис. 3.17** График функции уровня запасов  $Q(t)$

Следовательно, издержки в расчете на один день будут вычисляться следующим образом:

$$C(\tau, q) = \frac{K}{\tau} + \frac{qs}{2}. \quad (3.17)$$

Требуется определить такие значения величин цикла закупки  $\tau = \tau^*$  и объема закупки  $q = q^*$ , которые обеспечили бы минимум общих издержек на закупку, то есть

$$C(\tau, q) \rightarrow \min. \quad (3.18)$$

*Решение.* Учитывая выражение (3.16), имеем:  $C(\tau) = \frac{K}{\tau} + \frac{v\tau s}{2}$ .

Функция  $C(\tau)$  нелинейная и дифференцируемая. Поэтому, задача (3.18) сводится к

решению задачи  $\frac{dC}{d\tau} = 0$ .

$$\text{Тогда, } \frac{dC}{d\tau} = -\frac{K}{\tau^2} + \frac{vs}{2} = 0. \quad \tau^* = \sqrt{\frac{2K}{vs}} \quad (3.19)$$

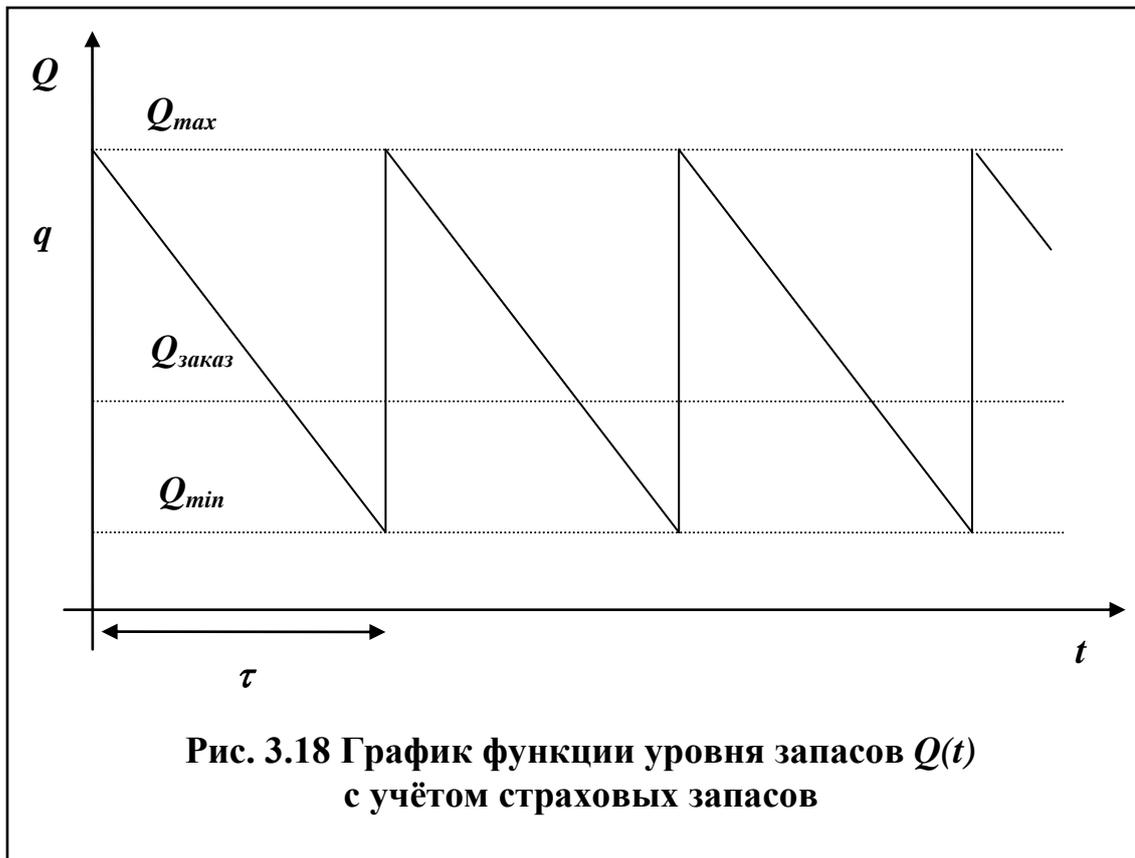
$$q^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}} \quad (3.20)$$

Так как  $\frac{d^2C}{d\tau^2} = \frac{2K}{\tau^3} > 0$ , то найденные значения  $\tau^*$  и  $q^*$  обеспечат минимум для функции  $C$ .

Оптимальное количество поставок в течение некоторого периода времени  $T$  определяется по формуле  $m^* = \left[ \frac{T}{\tau^*} \right]$ . (3.21)

$$m^* = \left[ \frac{T}{\tau^*} \right]. \quad (3.21)$$

Представленная модель закупок называется *моделью Уилсона*.



Можно обратить внимание на то, что указанными выше формулами можно пользоваться без каких-либо изменений и в том случае, если минимальный уровень запасов отличен от нуля. Практически же схема закупок выглядит так, как это представлено на рисунке 3.18. То есть определяется минимальный и максимальный уровни запасов, причем  $Q_{max} = Q_{min} + q^*$ , а также уровень запаса  $Q_s$ , который называется *точкой размещения заказа*. Значение  $Q_{min}$  определяет уровень *страховых запасов*, которые необходимы для обеспечения бездефицитной работы склада в случае колебаний спроса.

Точка размещения заказа выбирается таким образом, чтобы за время исполнения заказа уровень запасов достиг бы значения  $Q_{min}$ , то есть уровня страховых запасов на складе.

Средний уровень товарных запасов определяется по формуле:

$$Q = \frac{Q_{min} + Q_{max}}{2}. \quad (3.22)$$

### Задачи оптимального управления закупками товара

*Задача № 1.* Среднемесячная потребность магазина в товаре составляет 5000 единиц. Затраты на хранение единицы продукта составляют 0,25 у. е. в месяц. Расходы, не зависящие от величины поставляемой партии, связанные с каждой поставкой, равны 400 у. е. Найти оптимальный размер партии поставки, оптимальный интервал между поставками в днях (принять, что в месяце 30 дней), средний уровень текущего запаса и ежемесячные затраты, связанные с работой системы.

*Задача № 2.* Дневная потребность магазина в товаре составляет 90 единиц. Ежедневные затраты, связанные с хранением единицы продукта составляют 0,4 у. е. Расходы, связанные с каждой поставкой и не зависящие от ее величины, равны 450 у. е. Найти оптимальный размер партии поставки, оптимальный интервал между поставками в днях, средний уровень текущего запаса, число поставок в течении месяца и ежемесячные затраты, связанные с работой системы. Принять, что в месяце 30 дней.

*Задача № 3.* Среднемесячная потребность магазина в товаре составляет 9000 единиц. Ежемесячные затраты, связанные с хранением единицы продукта составляют 0,16 у.е. Расходы, связанные с каждой поставкой и не зависящие от ее величины, равны 80 у.е. Найти оптимальный размер партии поставки, оптимальный интервал между поставками в днях (принять, что в месяце 30 дней), средний уровень текущего запаса, число поставок в течении месяца и ежемесячные затраты, связанные с работой системы.

### **Приближенное решение задачи управления закупками**

Выше была рассмотрена модель Уилсона, на основе которой выполнялись расчеты оптимальных значений показателей управления закупками: объема партии поставки товара  $q^*$  и периода между поставками  $\tau^*$ . Однако на практике определение точных значений величины постоянных издержек  $K$  и величины переменных издержек  $s$ , как правило, вызывает затруднения. Соответственно, использование формул (3.19) и (3.20) становится невозможным.

Чтобы обойти данную проблему, выполним следующие преобразования указанных формул:

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2K}{s}} \cdot \sqrt{\frac{I}{v}} \quad \text{и} \quad q^* = \sqrt{\frac{2K}{s}} \cdot \sqrt{v}.$$

Введем обозначение:  $a = \sqrt{\frac{2K}{s}}$ .

Тогда,  $\tau^* = a \cdot \sqrt{\frac{I}{v}}$  (3.23) и  $q^* = a \cdot \sqrt{v}$  (3.24)

Воспользуемся статистикой продаж и поставок товара за предыдущие равные периоды. Например, в качестве периода можно выбрать неделю, декаду или месяц, и, соответственно, задать в табличной форме зависимость объема партии поставки  $q$  от объема среднедневных продаж  $v$  за  $n$  периодов:

$v$	$v_1$	$v_2$	...	$v_n$
$q$	$q_1$	$q_2$	...	$q_n$

Далее, перейдем от табличной к аналитической форме представления зависимости  $q = f(v, a)$ , задаваемой формулой (3.24). Для вычисления значения параметра функции  $a$  воспользуемся МНК:

$$S(a) = \sum_{t=1}^n (q_t - a\sqrt{v_t})^2 \rightarrow \min \quad (3.25)$$

и перейдем к решению задачи:  $\frac{dS}{da} = 0$ .

В результате получаем формулу для вычисления значения параметра функции

$$a = \frac{\sum_{t=1}^n q_t \sqrt{v_t}}{\sum_{t=1}^n v_t}. \quad (3.26)$$

Далее, подставляя найденное значение  $a$  в формулы (3.23) и (3.24), определяем приближенные оптимальные значения объема партии поставки товара  $q^*$  и периода между поставками  $\tau^*$ .

**Задача.** В таблицах ниже представлены данные об объемах среднедневных продажах  $v$  и объемах поставок  $q$  товара за равные периоды времени. Требуется определить приближенные значения оптимального объема партии поставки товара  $q^*$  и периода между поставками товара  $\tau^*$ .

### Вариант №1

$v$	25	19	15	18	16	17
$q$	190	145	120	135	140	150

**Вариант №2**

$v$	32	24	27	20	25	19
$q$	745	850	690	540	675	510

**Вариант №3**

$v$	27	15	23	19	18	14
$q$	265	240	220	200	200	230

**Вариант №4**

$v$	5	3	7	6	9	11
$q$	70	40	50	50	60	70

**Вариант №5**

$v$	12	18	23	20	17	16
$q$	350	450	500	450	460	470

### Многомерная оптимизация. Метод множителей Лагранжа

Пусть даны функции  $n$  переменных  $f(x)$ ,  $g_i(x)$ ,  $i=1, \dots, m$ ,  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . При этом все функции и их частные производные первого порядка непрерывны.

Рассмотрим задачу условной оптимизации:

$$f(x) \rightarrow \text{extr} \quad (3.27)$$

$$g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.28)$$

Составим функцию Лагранжа:  $F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$ ,

где  $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  – вектор неопределенных множителей Лагранжа.

Тогда, имеет место следующая задача:

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) \rightarrow \text{extr} \quad (3.29)$$

Таким образом, задача (3.27) – (3.28) нахождения условного экстремума функции  $f(x)$  свелась к задаче (3.29) безусловной оптимизации функции  $F(x, \lambda)$ , которая называется *задачей Лагранжа*, и которую можно решить классическим методом отыскания экстремума непрерывной и дифференцируемой функции.

Необходимым условием существования экстремума функции  $F(x, \lambda)$  является наличие решения следующей системы  $n + m$  уравнений с  $n + m$  неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial x_j} = 0, & j = 1, \dots, n \\ \frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial \lambda_i} = 0, & i = 1, \dots, m \end{cases} \quad (3.30)$$

В результате решения системы (3.30) находим значения элементов вектора  $\lambda$  и искомого вектора  $x$  – решения задачи (3.27) – (3.28). Указанный метод решения задачи (3.27) – (3.28) называется *методом множителей Лагранжа*.

Необходимо отметить, что не во всех случаях удается найти решение системы (3.30). Это зависит и от вида функций  $f(x)$  и  $g_i(x)$ ,  $i=1, \dots, m$ , и от числа уравнений, входящих в систему ограничений (3.28). В то же время многие задачи бизнес-анализа могут быть представлены моделью (3.27) – (3.28) и решены методом множителей Лагранжа.

### **Оптимальное управление закупками ассортимента товаров**

Рассмотрим случай, когда необходимо осуществлять управление закупками ассортимента товаров, предлагаемых предприятием торговли. Обозначим общее количество товаров ассортимента через  $L$ . Тогда в случае, когда закупки товаров осуществляются у различных поставщиков и никак не взаимосвязаны между собой, то общие издержки системы управления закупками будут вычисляться по формуле:

$$C(\tau) = \sum_{i=1}^L \left( \frac{K_i}{\tau_i} + \frac{s_i v_i \tau_i}{2} \right) \quad (3.31)$$

Следовательно, задача оптимизации затрат  $C(\tau) \rightarrow \min$  сводится к нахождению вектора  $\tau^* = (\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_L^*)$ , который обеспечит бы минимум функции  $C(\tau)$ . Оптимальные значения объемов поставок  $q_i^*$  вычисляются по формуле:

$$q_i^* = v_i \cdot \tau_i^*, \quad i=1, \dots, L. \quad (3.32)$$

Далее, введем вектор цен закупки товаров ассортимента  $z = (z_1, z_2, \dots, z_L)$ . Через  $Z$  обозначим общую сумму оборотных средств, выделяемых на закупку товаров. Тогда, имеет место следующая задача условной оптимизации:

$$C(\tau) \rightarrow \min \quad (3.33)$$

$$\sum_{i=1}^L z_i v_i \tau_i = Z \quad (3.34)$$

Для решения задачи (3.33), (3.34) воспользуемся методом множителей Лагранжа.

Имеем:

$$F(\tau, \lambda) = \sum_{i=1}^L \left( \frac{K_i}{\tau_i} + \frac{s_i v_i \tau_i}{2} \right) + \lambda \left[ \sum_{i=1}^L z_i v_i \tau_i - Z \right] \rightarrow \min \quad (3.35)$$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(\tau, \lambda)}{\partial \tau_i} = 0, & i = 1, \dots, L \\ \frac{\partial F(\tau, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_i = \sqrt{\frac{2K_i}{v_i(s_i + 2\lambda z_i)}}, i = 1, \dots, L \\ \sum_{i=1}^L z_i v_i \tau_i = Z \end{cases} \quad (3.36)$$

$$\sum_{i=1}^L \sqrt{\frac{2K_i z_i^2 v_i}{s_i + 2\lambda z_i}} = Z \quad (3.37)$$

Для нахождения неопределенного множителя Лагранжа  $\lambda$  необходимо решить уравнение (3.37) с использованием одного из рассмотренных выше численных методов, например, метода деления отрезка пополам.

Найденное приближенное решение  $\lambda$  подставляем в формулу (3.36). В результате получаем оптимальные значения элементов вектора  $\tau^*$ . Значения оптимальных объемов партий поставок товаров  $q_i^*$  вычисляем по формуле (3.32).

Далее, если закупки товаров осуществляются либо у одного поставщика, либо посредством совмещения заказов, то имеет место следующая формула расчета издержек на закупку:

$$C(\tau) = \sum_{i=1}^L \left( \frac{K_i}{\tau} + \frac{s_i v_i \tau}{2} \right) = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^L K_i + \frac{\tau}{2} \sum_{i=1}^L s_i v_i, \quad (3.38)$$

а ограничение (3.34) принимает вид:  $\tau \sum_{i=1}^L z_i v_i = Z \quad (3.39)$

Тогда, имеет место задача оптимизации  $C(\tau) \rightarrow \min$ , при условии (3.39).

Имеем:  $\frac{dC}{d\tau} = -\frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^L K_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L s_i v_i = 0$ ;  $\tau = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^L K_i}{\sum_{i=1}^L s_i v_i}}$ ,

Далее, учитывая, что согласно условию (3.39)  $\tau = \frac{Z}{\sum_{i=1}^L z_i v_i}$ , получаем:

$$\tau^* = \min \left\{ \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^L K_i}{\sum_{i=1}^L s_i v_i}}; \frac{Z}{\sum_{i=1}^L z_i v_i} \right\} \quad (3.40)$$

Значения оптимальных объемов партий поставок товаров  $q_i^*$  вычисляем по формуле:

$$q_i^* = v_i \times \tau^*, \quad i=1, \dots, L. \quad (3.41)$$

### **Оптимальная закупка производственных ресурсов**

Пусть процесс выпуска продукции на предприятии определяется производственной функцией  $y(x)$ .

*Производственная функция* связывает объем выпуска некоторой продукции  $y$  с объемами затрачиваемых при этом ресурсов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – оборудования, сырья и материалов, трудовых ресурсов и т. д.

Рассмотрим наиболее простую и часто применяемую в экономических исследованиях степенную *производственную функцию Кобба-Дугласа*:

$$y(x) = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad (3.42)$$

где

$y(x)$  – объем выпускаемой продукции;

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – вектор объемов используемых в процессе производства ресурсов;

$A, \alpha_i, i=1, \dots, n$  – положительные константы, характеризующие производственный процесс. Обычно принимают, что  $0 < \alpha_i < 1$ . Кроме того, во многих случаях полагают, что

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

Параметры  $\alpha_i$  имеют свою экономическую интерпретацию, характеризуя *эластичность объема выпуска по  $i$ -му ресурсу*.

*Эластичность* определяет способность результативного показателя  $y$  изменяться под действием факторного показателя  $x$ .

Количественно, мера эластичности выражается с помощью *коэффициента эластичности*, значение которого вычисляется по формуле  $E_{y/x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{y}$ ,  $i=1, \dots, n$ , и пока-

зывает, на сколько процентов изменится значение функции при увеличении значения аргумента на один процент.

В дискретном варианте, если функция  $y = f(x)$  задана таблично, то значение коэффициента эластичности определяется по формуле:

<b>x</b>	$x_0$	$x_1$
<b>y</b>	$y_0$	$y_1$

$$E_{y/x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x_0}{y_0}.$$

Для производственной функции Кобба-Дугласа имеет место следующее соотношение:  $E_{y/x_i} = \alpha_i$ . Например, если  $\alpha_1 = 0,3$ , то это будет означать, что изменение (увеличение или уменьшение) объема первого ресурса на 1% приведет к соответствующему изменению объема выпуска на 0,3%.

Далее, обозначим через  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  вектор цен на закупку ресурсов, а через  $C$  – сумму оборотных средств, имеющих в распоряжении предприятия на закупку ресурсов.

Требуется определить вектор  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  – план закупки ресурсов, обеспечивающий максимальный объем выпуска продукции с учетом ограничения на сумму оборотных средств.

Таким образом, имеет место следующая задача условной оптимизации:

$$y(x) = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^n c_i x_i = C \quad (3.43)$$

Решим задачу (3.43) методом множителей Лагранжа. Выполним линеаризацию целевой функции:

$$\ln y = \ln A + \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 + \dots + \alpha_n \ln x_n = \ln A + \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln x_i.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \ln A + \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln x_i + \lambda \left[ \sum_{i=1}^n c_i x_i - C \right],$$

и решим задачу  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) \rightarrow \max$ ,

которая сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial x_k} = 0, k = 1, \dots, n \\ \frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\alpha_k}{x_k} + \lambda c_k = 0, k = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n c_i x_i = C \end{cases} \quad \begin{cases} c_k x_k = -\frac{\alpha_k}{\lambda}, k = 1, \dots, n \\ -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \alpha_i = C \end{cases}$$

В результате получаем формулу для вычисления значений элементов вектора  $x^*$  – оптимального плана закупки ресурсов:

$$x_k^* = \frac{\alpha_k}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \cdot \frac{C}{c_k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.44)$$

Теперь несколько изменим условие задачи: предположим, что задан план объема выпуска  $Y_0$  и требуется определить величину минимальных затрат на ресурсы, которые обеспечат выполнение плана. Таким образом, имеет место следующая задача:

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \min, \quad A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} = Y_0. \quad (3.45)$$

Выполняем линеаризацию производственной функции, составляем функцию Лагранжа и решаем следующую задачу:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^n c_i x_i + \lambda \left[ \ln A + \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln x_i - Y_0 \right] \rightarrow \min$$

Задача сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n \\ \frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \begin{cases} c_k + \lambda \frac{\alpha_k}{x_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n \\ \ln A + \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln x_i = Y_0 \end{cases} \begin{cases} x_k = -\lambda \frac{\alpha_k}{c_k}, \quad k = 1, \dots, n \\ A \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} = Y_0 \end{cases}$$

$$(-\lambda) = \left( \frac{Y_0}{A \prod_{i=1}^n \left( \frac{\alpha_i}{c_i} \right)^{\alpha_i}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i;$$

$$x_k^* = \frac{\alpha_k}{c_k} \left( \frac{Y_0}{A \prod_{i=1}^n \left( \frac{\alpha_i}{c_i} \right)^{\alpha_i}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.46)$$

– оптимальный план закупки ресурсов.

## Методы приведения многокритериальной задачи к однокритериальной задаче оптимизации

На практике оказывается, что решение многих задач оптимизации предполагает достижение сразу нескольких целей, и, соответственно, использование многих критериев оптимальности. Однако имеющиеся методы оптимизации в целом ориентированы на решение однокритериальных задач. Следовательно, возникает необходимость в методах приведения задач оптимизации с многими критериями к задаче с одним критерием. Рассмотрим некоторые из таких методов.

Пусть задача оптимизации включает вектор целевых функций:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)).$$

### 1. Метод линейной комбинации критериев

Определим вектор весовых коэффициентов  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ , характеризующих значимость критериев задачи для ЛПР. В общем случае принимают, что  $0 < \alpha < 1$ ,

$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ . Тогда единый критерий оптимальности можно представить как линейную

комбинацию исходных критериев задачи:

$$F(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x) \rightarrow \text{extr} \quad (3.47)$$

При этом очевидно, что все целевые функции должны иметь одно направление своего стремления к экстремуму (стремиться либо к минимуму, либо к максимуму) и значения их должны выражаться в одних и тех же единицах измерения.

Первое требование обеспечивается изменением знака функции:

$$\text{если } f(x) \rightarrow \max(\min), \text{ то } -f(x) \rightarrow \min(\max).$$

Второе требование обеспечивается посредством нормирования значений каждой целевой функции по формуле:

$$f_{\text{norm}}(x) = \frac{f(x) - \sigma}{a},$$

где

$a$  – среднее значение функции;  $\sigma$  – стандартное отклонение значений функции, или  $a$  – какое-либо допустимое значение функции (например, минимальное, среднее или максимальное);  $\sigma = 0$ .

## 2. Метод ведущего критерия

В этом случае лицом, принимающим решение, из множества критериев выбирается наиболее значимый из них, который и сохраняется в качестве целевой функции.

Пусть это будет критерий с индексом  $k \in \{1, \dots, m\}$ .

Остальные критерии преобразуются в ограничения задачи следующим образом:

- если  $f_i(x) \rightarrow \max$ , то  $f_i(x) \geq b_i$ ;
- если  $f_i(x) \rightarrow \min$ , то  $f_i(x) \leq b_i, i=1, \dots, m, i \neq k$ ,

где  $b_i (i=1, \dots, m, i \neq k)$  – заданные ЛПР числовые константы, соответствующие нижним и верхним границам изменения значений целевых функций.

Кроме того, для целевых функций могут быть заданы их целевые (то есть желаемые ЛПР) значения  $b_i$ . Тогда соответствующие ограничения будут иметь вид равенства:

$$f_i(x) = b_i.$$

Таким образом, имеет место следующая задача оптимизации:

$$f_k(x) \rightarrow \max (\min), \quad f_i(x) \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_i, \quad i = 1, \dots, m, i \neq k. \quad (3.48)$$

## 3. Метод целевого программирования

Для каждого из критериев  $f_i(x)$  определим их целевые значения  $f_i^* (i=1, \dots, m)$ . Как и в методе линейной комбинации критериев, определим вектор весовых коэффициентов

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \text{ в общем случае: } 0 < \alpha < 1, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1.$$

Определим эвклидово расстояние  $d$  между вектором целевых функций  $f(x)$  и вектором целевых значений  $f^* = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_m^*)$ :

$$d(f(x), f^*) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \alpha_i (f_i(x) - f_i^*)^2}$$

Тогда задача оптимизации будет заключаться в минимизации расстояния между указанными векторами, то есть (опуская операцию извлечения корня квадратного из суммы) имеем:

$$F(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i (f_i(x) - f_i^*)^2 \rightarrow \min \quad (3.49)$$

### Оптимальное планирование продаж

Торговое предприятие планирует к продаже в течение периода  $n$  видов товаров. Обозначим через  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  подлежащий определению вектор – план продаж, где  $q_i$  – планируемые физические объемы продаж  $i$ -го товара,  $i=1, \dots, n$ .

Введем следующие параметры задачи:

$q^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$  – вектор целевых значений объемов продаж на плановый период, полученный в результате изучения статистики спроса на товары ассортимента предприятия;

$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  – вектор закупочных цен на товары;

$p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  – вектор цен продажи товаров;

$r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  – вектор значений рентабельности продаж товаров. В качестве показателя рентабельности можно использовать и значение удельной валовой прибыли (мáржи):  $r_i = p_i - c_i, i=1, \dots, n$ .

$X$  – план объема товарооборота.

Тогда, используя критерий (3.49), можно построить следующую математическую модель для решения поставленной задачи:

$$f(q) = \sum_{i=1}^n r_i^2 (q_i - q_i^*)^2 \rightarrow \min \quad (3.50)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i q_i = X \quad (3.51)$$

Здесь в качестве целевых функций выступают функции рентабельности продаж товаров:  $f_i(q) = r_i q_i$ , а в качестве их целевых значений – целевые значения рентабельности  $f_i^* = r_i q_i^*$  ( $i=1, \dots, n$ ).

Рассмотрим решение задачи (3.50), (3.51) методом множителей Лагранжа.

Имеем: 
$$F(q, \lambda) = \sum_{i=1}^n r_i^2 (q_i - q_i^*)^2 + \lambda \left[ \sum_{i=1}^n p_i q_i - X \right] \rightarrow \min$$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(q, \lambda)}{\partial q_k} = 0, & k = 1, \dots, n \\ \frac{\partial F(q, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} q_k = q_k^* - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{p_k}{r_k^2}, k = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n p_i q_i = X \end{cases} ;$$

$$\sum_{i=1}^n p_i \left( q_i^* - \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{p_i}{r_i^2} \right) = X; \quad \sum_{i=1}^n p_i q_i^* - \frac{\lambda}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{p_i}{r_i} \right)^2 = X;$$

Обозначим:  $\Delta_X = X - \sum_{i=1}^n p_i q_i^*$ ,  $S_{p^2/r^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{p_i}{r_i} \right)^2$ .

Тогда,  $-\frac{\lambda}{2} = \frac{\Delta_X}{S_{p^2/r^2}}$  и

$$q_k = q_k^* + \frac{p_k}{r_k^2} \cdot \frac{\Delta_X}{S_{p^2/r^2}}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.52)$$

Используя формулу (3.52), находим элементы вектора  $q$  – плановые значения физического объема продаж товаров ассортимента предприятия, являющиеся оптимальными в соответствии с критерием (3.50).

Далее, предположим, что нет строгих требований относительно выполнения равенства (3.51). Тогда, используя метод целевого программирования можно построить следующий критерий для решения задачи (3.50), (3.51) (принимая, что  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ):

$$F(q) = \alpha_1 \sum_{i=1}^n r_i^2 (q_i - q_i^*)^2 + \alpha_2 \left[ \sum_{i=1}^n p_i q_i - X \right]^2 \rightarrow \min \quad (3.53)$$

Решение задачи (3.53) сводится к решению системы уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

В результате получаем следующую систему линейных уравнений:

$$(\alpha_1 r_i^2 + \alpha_2 p_i^2) \cdot q_i + \alpha_2 p_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n p_k q_k = \alpha_1 r_i^2 q_i^* + \alpha_2 p_i X, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.54)$$

которую можно решить любым из приведенных выше методов решения уравнений.

### **Оптимальное ценообразование в условиях конкуренции**

Торговое предприятие планирует цены на группу из  $n$  товаров своего ассортимента с учетом конъюнктуры рынка и требований к рентабельности продаж.

Обозначим через  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  подлежащий определению *вектор цен* на товары ассортимента, где  $p_i$  – планируемая розничная цена на  $i$ -й товар,  $i = 1, \dots, n$ .

Параметры задачи:

$p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$  – вектор минимальных цен на товары ассортимента, полученный в результате изучения конъюнктуры рынка

$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  – вектор количества основных фирм-конкурентов, торгующих на рынке каждым из товаров, включая само предприятие;

$q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  – план физического объема продаж товаров на заданный период времени;

$X$  – плановая величина объема товарооборота.

Используя критерий (3.49), построим следующую математическую модель для решения поставленной задачи:

$$f(p) = \sum_{i=1}^n f_i (p_i - p_i^*)^2 \rightarrow \min \quad (3.55)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i q_i = X \quad (3.56)$$

Решая задачу (3.55), (3.56) методом множителей Лагранжа, получаем формулу для вычисления оптимальных цен на товары группы:

$$p_i = p_i^* + \frac{q_i}{f_i} \frac{\Delta_X}{S_{q^2/f}}, \quad i = 1, \dots, n; \quad (3.57)$$

$$\Delta_X = X - \sum_{k=1}^n p_k^* q_k; S_{q^2/f} = \sum_{k=1}^n \frac{q_k^2}{f_k}$$

### «Задача о ресторане»:

#### оптимальное планирование численности персонала

Руководство предприятия торговли планирует численность персонала, необходимого для обслуживания покупателей в торговом зале на период  $T$  единиц времени (например, часов или дней).

Обозначим через  $n = (n_1, n_2, \dots, n_T)$  планируемое для обслуживания количество продавцов на период времени  $T$ .

Известна средняя интенсивность  $\mu$  обслуживания покупателей одним продавцом (человек в единицу времени). Обозначим через  $x_t$  объем обслуживания в единицу времени  $t=1, \dots, T$ .

Имеет место следующее формула:  $x_t = \mu \times n_t, t=1, \dots, T$ .

На основании данных об интенсивности потока покупателей (человек в единицу времени) за предыдущие периоды времени получен вектор  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_T)$  прогнозируемых значений объема обслуживания на период времени  $T$ .

Обозначим через  $e_t = |x_t - \lambda_t|$  ошибку, связанную с неправильным выбором объема обслуживания в единицу времени  $t=1, \dots, T$ . Введем следующую целевую функцию:

$$g_1(x) = \sum_{t=1}^T e_t^2 \rightarrow \min.$$

Будем считать, что наибольшие потери в плане организации работы торгового персонала вызывают изменения объема обслуживания в последовательные моменты времени. Через  $f_t = |x_t - x_{t-1}|$  обозначим флуктуацию (колебания) объема обслуживания в моменты времени  $t=2, \dots, T$ . Тогда вторая целевая функция имеет вид:

$$g_2(x) = \sum_{t=2}^T f_t^2 \rightarrow \min.$$

Пусть значимость флуктуации объема обслуживания равна 1. Введем весовой коэффициент  $w > 0$ , который будет характеризовать значимость ошибки выбора объема обслуживания.

Построим целевую функцию  $G(x)$  как линейную комбинацию функций  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$ :

$$G(x) = w \sum_{t=1}^T e_t^2 + \sum_{t=2}^T f_t^2 = w \sum_{t=1}^T (x_t - \lambda_t)^2 + \sum_{t=2}^T (x_t - x_{t-1})^2$$

Очевидно, что задача будет заключаться в том, чтобы найти такой план обслуживания  $x = (x_1, x_2, \dots, x_T)$ , который обеспечил бы минимальное значение функции  $G(x)$ :

$$G(x) \rightarrow \min \quad (3.58)$$

Решение задачи (3.58) сводится к решению системы уравнений:

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x_t} = 0, \quad t = 1, \dots, T$$

При  $t = 1$  будем иметь:

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x_1} = 2w(x_1 - \lambda_1) - 2(x_2 - x_1) = 0; \quad (1+w)x_1 - x_2 = w\lambda_1$$

При  $t = 2, \dots, T-1$  получим:

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x_t} = 2w(x_t - \lambda_t) + 2(x_t - x_{t-1}) - 2(x_{t+1} - x_t) = 0$$

Тогда  $-x_{t-1} + (2+w)x_t - x_{t+1} = w\lambda_t$ .

При  $t = T$  будем иметь:  $\frac{\partial G(x)}{\partial x_T} = 2w(x_T - \lambda_T) + 2(x_T - x_{T-1}) = 0$

Таким образом,  $-x_{T-1} + (1+w)x_T = w\lambda_T$ .

Получаем систему линейных уравнений:  $A \times x = b, \quad (3.59)$

где

$$A = \begin{bmatrix} 1+w & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2+w & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 2+w & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1+w \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{T-1} \\ x_T \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} w\lambda_1 \\ w\lambda_2 \\ \dots \\ w\lambda_{T-1} \\ w\lambda_T \end{bmatrix}$$

Решить данную систему можно одним из методов решения систем линейных уравнений. Вычислив значения вектора  $x$ , далее определяем необходимое количество продавцов  $n_t = \lceil x_t / \mu \rceil$ ,  $t=1, \dots, T$ .

*Задача.* Определить число продавцов, которое требуется для обслуживания покупателей в течение пяти дней для следующих вариантов:

1.  $\lambda = (300, 420, 180, 540, 670)$ ;  $\mu = 70$ ;  $w = 3$ .
2.  $\lambda = (120, 310, 90, 400, 215)$ ;  $\mu = 40$ ;  $w = 5$ .
3.  $\lambda = (20, 75, 30, 55, 90)$ ;  $\mu = 15$ ;  $w = 4$ .
4.  $\lambda = (150, 80, 230, 210, 40)$ ;  $\mu = 60$ ;  $w = 2$ .
5.  $\lambda = (50, 270, 160, 290, 70)$ ;  $\mu = 35$ ;  $w = 3$ .

### **Выбор оптимального местоположения склада**

С целью обеспечения централизованных поставок товаров нескольким розничным торговым точкам требуется выбрать оптимальное местоположение склада розничной торговой сети.

В качестве критерия для выбора оптимального местоположения склада выберем функцию издержек  $Z$ , зависящую от расстояний между складом и торговыми точками, а также от объемов потребностей этих точек в товарах.

Введем следующие обозначения:

$n$  – число торговых точек;

$d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  – вектор расстояний между складом и торговыми точками;

$q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  – вектор потребностей торговых точек в товарах (в натуральных или денежных единицах).

Тогда в неявном виде критерий для выбора оптимального местоположения склада может быть представлен следующим образом:

$$Z = Z(q, d) \rightarrow \min.$$

Для того чтобы построить вектор расстояний  $d$ , необходимо воспользоваться топографической картой местности, на которую наносятся координаты торговых точек. Затем на карту накладывается декартова система координат  $OXY$ , чтобы перейти от топографических к декартовым координатам  $(x, y)$  торговых точек. Тогда каждая торговая точка будет определяться тройкой значений  $(x_i, y_i, q_i)$ ,  $i=1, \dots, n$ .

Обозначим через  $(x_0, y_0)$  декартовы координаты склада – решение задачи. Тогда расстояние между складом и каждой  $i$ -ой торговой точкой будет вычисляться по формуле:

$$d_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}, \quad i = 1, \dots, n$$

Теперь воспользуемся методом целевого программирования и запишем критерий оптимальности в явном виде:

$$Z(q, d) = \sum_{i=1}^n q_i d_i^2 = \sum_{i=1}^n q_i [(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2] \rightarrow \min \quad (3.60)$$

Следовательно, задача заключается в том, чтобы найти такие координаты  $(x_0, y_0)$  местоположения склада, которые обеспечат минимальное значение функции  $Z(q, d)$ .

Решение задачи (3.60) сводится к решению системы:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial y_0} = 0.$$

В результате получаем формулы для нахождения координат склада:

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^n q_i x_i}{\sum_{i=1}^n q_i}, \quad y_0 = \frac{\sum_{i=1}^n q_i y_i}{\sum_{i=1}^n q_i}. \quad (3.61)$$

Данный метод называется *методом центра масс*, так как с физической точки зрения формулы (3,61) определяют координаты центра масс системы из  $n$  точек, имеющие координаты  $(x_i, y_i)$  и массы  $q_i$ ,  $i=1, \dots, n$ .

*Задача.* Определить координаты  $(x_0, y_0)$  оптимального месторасположения склада для следующих вариантов значений исходных данных:

1. Точки	1	2	3	4	5	6	7	8	Ответ
$x$	3	1	8	12	2	4	15	7	6,8
$y$	9	6	2	5	16	9	4	10	7,2
$q$	130	250	75	310	150	90	145	50	

2. Точки	1	2	3	4	5	6	Ответ
$x$	20	14	9	3	16	5	13,0
$y$	4	6	17	21	19	12	12,3
$q$	150	400	20	160	350	100	

3. Точки	1	2	3	4	5	6	7	Ответ
$x$	10	2	6	9	1	3	15	4,4
$y$	7	18	13	8	16	11	26	14,5
$q$	100	300	230	50	185	60	30	

4. Точки	1	2	3	4	5	6	7	8	Ответ
$x$	3	9	11	6	4	18	2	17	9,1
$y$	8	13	21	18	11	15	6	4	12,0
$q$	200	360	140	210	75	300	270	165	

5. Точки	1	2	3	4	5	6	Ответ
$x$	5	12	19	10	8	16	12,7
$y$	20	17	3	5	14	21	15,1
$q$	190	220	160	340	150	700	

### Задачи математического программирования

*Математическое программирование* – раздел прикладной математики, разрабатывающая теорию и методы решения задач многомерной условной оптимизации, то есть задач нахождения экстремума функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

В общем виде модель задачи математического программирования может быть записана следующим образом:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{extr} \quad (3.62)$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_i \quad (i=1, \dots, m), \quad (3.63)$$

где

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – целевая функция или критерий оптимальности;

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – план задачи (вектор управления, стратегия) – неизвестные величины, которые являются решением задачи (3.62), (3.63). Из экономических соображений на план задачи, как правило, налагаются условия неотрицательности  $x_j \geq 0$ ,  $j=1, 2, \dots, n$  и/или целочисленности;

Ограничения (3.63) образует область допустимых решений (экономических возможностей) задачи.

План  $X$ , удовлетворяющий системе ограничений задачи (3.63), называется *допустимым*. Допустимый план  $X^*$ , обеспечивающий экстремум функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , называется *оптимальным*.

В зависимости от вида функции  $f(X)$  и  $g(X)$ , а также условий, налагаемых на план задачи  $X$ , можно рассматривать следующие задачи *линейного, нелинейного, целочисленного, динамического и стохастического программирования*.

### Решение задач математического программирования

#### Вариант №1

Решить задачу линейного программирования:  $X=(x_1, x_2, x_3)$ .

$$x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 2$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

**Результаты вычислений:**

$$X = (x_1, x_2, x_3) = (0; 4; 0)$$

$$f(X)=12$$

#### Вариант №2

Решить задачу линейного программирования:  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ .

$$x_1 + 5 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - 6 \cdot x_4 \rightarrow \min$$

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 - 5 \cdot x_4 \leq 1$$

$$5 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 + x_3 - x_4 \leq 3$$

$$4 \cdot x_1 + x_2 - 2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 \leq 2$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4$$

**Результаты вычислений:**

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0; 0; 0; 0,6667)$$

$$f(X) = -4$$

#### Вариант №3

Решить задачу линейного программирования:  $X=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ .

$$x_1 - 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 10 \cdot x_4 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 - 6 \cdot x_4 = 1$$

$$x_1 + x_2 + 4 \cdot x_3 - 8 \cdot x_4 = 1$$

$$4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 - 4 \cdot x_4 = 3$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4$$

**Результаты вычислений:**

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,5; 0,5; 0; 0)$$

$$f(X) = -0,5$$

#### Вариант №4

Решить задачу линейного программирования:  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ .

$$2 \cdot x_1 - x_2 + x_3 - 3 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 \rightarrow \max$$

$$x_1 - x_2 + 3 \cdot x_3 - 18 \cdot x_4 + 2 \cdot x_5 = -4$$

$$2 \cdot x_1 - x_2 + 4 \cdot x_3 - 21 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 = 22$$

$$3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 - 43 \cdot x_4 + 11 \cdot x_5 = 38$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5$$

**Результаты вычислений:**

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (20,8; 0; 0; 2; 5,6)$$

$$f(X) = 58$$

#### Вариант №5

Решить задачу линейного программирования:  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ .

$$-x_1 - x_2 - x_3 + 30 \cdot x_4 + 8 \cdot x_5 - 56 \cdot x_6 \rightarrow \min$$

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 - x_4 + x_5 - 10 \cdot x_6 \leq 20$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - x_4 - x_5 + 7 \cdot x_6 = -11$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6$$

**Результаты вычислений:**

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0; 0; 0; 0; 11; 0)$$

$$f(X) = 88$$

#### Вариант №6

Решить задачу линейного программирования:  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ .

$$21 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 - 13 \cdot x_4 + 7 \cdot x_5 \rightarrow \min$$

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - x_4 + 4 \cdot x_5 \leq 12$$

$$x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 + x_4 - 2 \cdot x_5 = 8$$

$$3 \cdot x_1 - x_2 + x_3 - 2 \cdot x_4 - x_5 = 1$$

**Результаты вычислений:**

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-1,2; 0; 0; 0; -4,6)$$

$$f(X) = -57,4$$

**Вариант №7**Решить задачу нелинейного программирования:  $X=(x_1, x_2, x_3)$ .

$$-x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 + 2 \cdot x_2 \cdot x_3 = -3,48$$

$$7 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \geq 13$$

$$x_1 - 2 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 \geq 2$$

$$x_2 \geq 0$$

**Результаты вычислений:**

$$X = (x_1, x_2, x_3) = (1,87; 0; -0,03)$$

$$f(X) = -3,48$$

**Вариант №8**Решить задачу нелинейного программирования:  $X=(x_1, x_2)$ .

$$-4 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 - x_1^2 - 1,5 \cdot x_2^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

**Результаты вычислений:**

$$X = (x_1, x_2) = (0,33; 2,67)$$

$$f(X) = 11$$

**Вариант №9**Решить задачу нелинейного программирования:  $X=(x_1, x_2)$ .

$$-x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max$$

$$2 \cdot x_1 + x_2 \geq 2$$

$$2 \cdot x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

**Результаты вычислений:**

$$X = (x_1, x_2) = (0,8; 0,4)$$

$$f(X) = -0,8$$

**Вариант №10**Решить задачу нелинейного программирования:  $X=(x_1, x_2)$ .

$$-x_1 + 6 \cdot x_2 - x_1^2 - 3 \cdot x_2^2 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-2 \cdot x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

**Результаты вычислений:**

$$X = (x_1, x_2) = (1,43; 1,57)$$

$$f(X) = 5,3$$

### Выполнение задачи в *Microsoft Excel*

Решить следующую модель (задачу) линейного программирования:

Целевая функция $f(X)$	$x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 \rightarrow \max$
Функция ограничения $g_1(X)$	$x_1 + x_2 + x_3 = 4$
Функция ограничения $g_2(X)$	$x_1 - x_2 + x_3 \leq 2$
Ограничение	$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$

Найти вектор  $X = (x_1, x_2, x_3)$ , удовлетворяющий поставленной задаче.

**Результаты вычислений:**

$$X = (x_1, x_2, x_3) = (0; 4; 0)$$

$$f(X) = 12$$

1. Задать в ячейках таблицы начальные допустимые значения для плана задачи  $x_1, x_2, x_3$ :

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
<b>План задачи:</b>	0	0	0

2. Записать в отдельных ячейках таблицы функции:

$$f(X) = x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3$$

$$g_1(X) = x_1 + x_2 + x_3$$

$$g_2(X) = x_1 - x_2 + x_3$$

Это можно сделать одним из следующих способов:

#### 1-й способ записи математической модели

Записать в отдельные ячейки таблицы функции (см. Рис.3.19):

Целевая функция $f(X)=$	$= x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3$	$\Rightarrow$	$\max$
Функция ограничения $g_1(x)=$	$= x_1 + x_2 + x_3$	$=$	4
Функция ограничения $g_2(x)=$	$= x_1 - x_2 + x_3$	$\leq$	2


**Рис. 3.19** Модель линейного программирования

### 2-й способ записи математической модели

Для записи функций модели можно использовать функцию *СУММПРОИЗВ(...)* из категории *Математические*. Данный способ записи выражений функций удобно использовать в случае, если задается большое количество переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n \geq 3$ ).

Например, для указанной задачи:

Целевая функция $f(X) =$	$x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3$	$\Rightarrow$	$1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + (-1) \cdot x_3$
Функция ограничения $g_1(x) =$	$x_1 + x_2 + x_3$	$\Rightarrow$	$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3$
Функция ограничения $g_2(x) =$	$x_1 - x_2 + x_3$	$\Rightarrow$	$1 \cdot x_1 + (-1) \cdot x_2 + 1 \cdot x_3$

Для записи выражений следует (см. Рис.3.20):

- ввести в ячейки таблицы значения коэффициентов  $a_1, a_2, a_3$  при неизвестных  $x_1, x_2, x_3$  для функций модели:

Функции	Коэффициенты при неизвестных $x_1, x_2, x_3$		
	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$f(X) =$	1	3	-1
$g_1(x) =$	1	1	1
$g_2(x) =$	1	-1	1

- использовать функцию *СУММПРОИЗВ(...)*:

$f(X) =$	$=\text{СУММПРОИЗВ}(\text{массив } a_j; \text{ массив } x_j)$	$\Rightarrow$	$\text{max}$
$g_1(x) =$	$=\text{СУММПРОИЗВ}(\text{массив } a_j; \text{ массив } x_j)$	$=$	4
$g_2(x) =$	$=\text{СУММПРОИЗВ}(\text{массив } a_j; \text{ массив } x_j)$	$\leq$	2

	A	B	C	D	E	F	G
11	<b>Задача линейного программирования</b>						
12		$x_1$	$x_2$	$x_3$	<b>Условие неотрицательности плана</b>		
13	<b>План задачи:</b>	0	0	0	$\geq$	0	
14		<b>Коэффициенты при неизвестных <math>x_1, x_2, x_3</math></b>					
15		$a_1$	$a_2$	$a_3$			
16	<b>Коэффициенты у целевой функции <math>Z(X)=</math></b>	1	3	-1			
17	<b>Коэффициенты у 1-й функции ограничения <math>\varphi_1(x)=</math></b>	1	1	1			
18	<b>Коэффициенты у 2-й функции ограничения <math>\varphi_2(x)=</math></b>	1	-1	1			
19							
20							
21	<b>Целевая функция <math>Z(X)=</math></b>	<b>=СУММПРОИЗВ(B16:D16; \$B\$13:\$D\$13)</b>					
22	<b>1-я функция ограничения <math>\varphi_1(x)=</math></b>	0	=	4			
23	<b>2-я функция ограничения <math>\varphi_2(x)=</math></b>	0	$\leq$	2			
24							

**Рис. 3.20** Модель линейного программирования

*Замечание:* Ограничение неотрицательности значений плана – решения задачи  $x_j \geq 0$ ,  $j = 1, 2, 3$  можно записать в качестве комментария одним из следующих способов:

**1-й способ**

<i>План задачи <math>x_j, j = 1, 2, 3</math></i>	$\geq$	0
--	--------	---

**2-й способ**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	<i>Условие неотрицательности</i>	
<i>План задачи:</i>	0	0	0	$\geq$	<b>0</b>

*Замечание:* Если решается задача нелинейного программирования и выражение целевой функции или выражение функции ограничения содержит неизвестное в какой-либо степени, и при этом значение коэффициента при неизвестной  $x_i$  равно -1, например  $-x_1^2$ , то при записи данного выражения в *Microsoft Excel* необходимо это выражение записать одним из следующих способов:

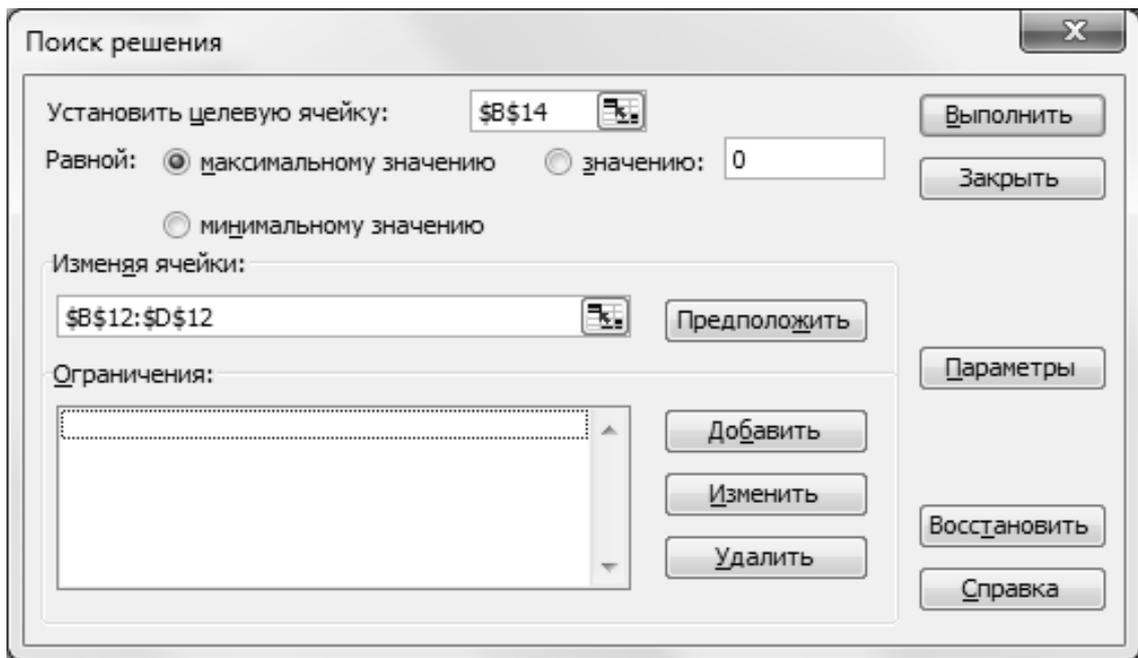
$$-1 \cdot x_1^2 \quad \text{или} \quad -(x_1^2)$$

Например:

<i>Целевая функция</i>	$-x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 + 2 \cdot x_2 \cdot x_3$
<i>1-й способ записи =&gt;</i>	$= -1 \cdot x_1^2 - 4 \cdot x_2^2 + 2 \cdot x_2 \cdot x_3$
<i>2-й способ записи =&gt;</i>	$= -(x_1^2) - 4 \cdot x_2^2 + 2 \cdot x_2 \cdot x_3$

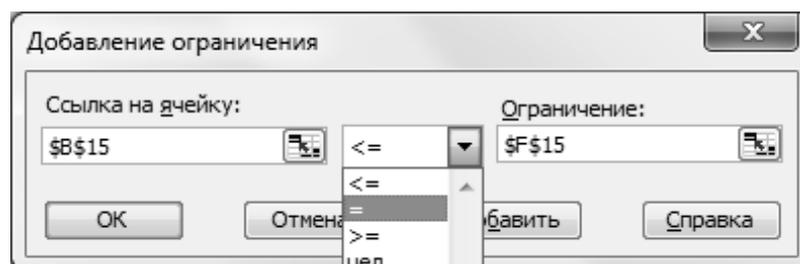
3. Перейти к решению поставленной задачи  $f(X) \rightarrow \max$ . Для чего следует выбрать вкладку *Данные* → группу *Анализ* → кнопку *Поиск решения*. В результате загрузится окно диалога *Поиск решения* (см. Рис.3.21), в котором:

- в окне поля ввода *Установить целевую ячейку*: ввести ссылку на ячейку таблицы, в которой записано выражение целевой функции  $f(X)$ , а именно на ячейку таблицы, которая содержит выражение  $= x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3$ .
- в группе переключателей *Равной*: установить переключатель  *Максимальному*, так как должно быть найдено максимальное значение целевой функции.
- В окне поля ввода *Изменяя ячейки*: ввести ссылки на ячейки таблицы, в которых находятся начальные значения плана-решения задачи  $x_1, x_2, x_3$ .



**Рис. 3.21** Окно диалога *Поиск решения*

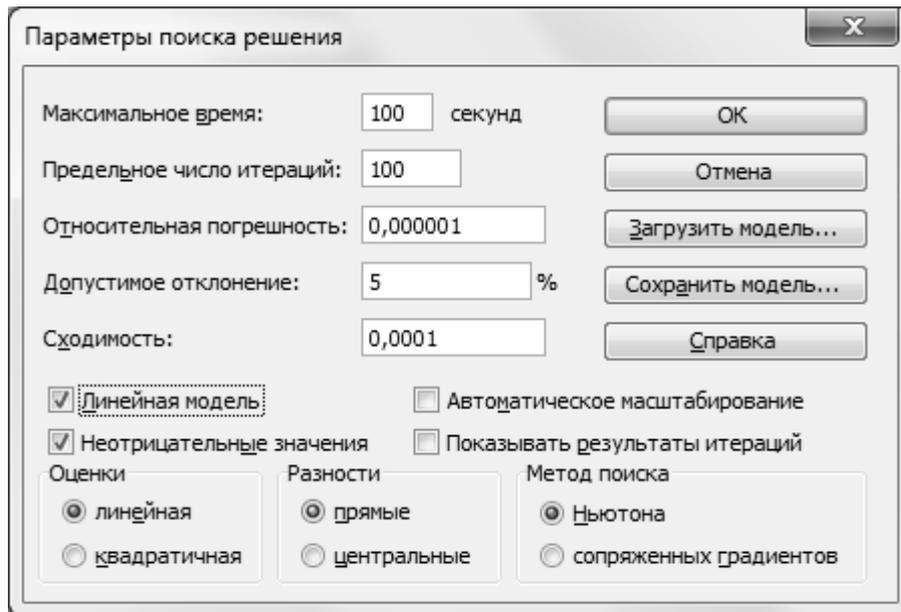
- В группе *Ограничения*: необходимо перечислить ограничения, накладываемые на план-решение поставленной задачи.
  - Для ввода первого ограничения задачи  $x_1 + x_2 + x_3 = 4$  следует выбрать кнопку  , в результате чего раскроется окно диалога *Добавление ограничения* (см. Рис.3.22).



**Рис. 3.22** Окно диалога *Добавление ограничения*

- В раскрывшемся окне диалога *Добавление ограничения* в окне поля ввода *Ссылка на ячейку*: указать адрес ячейки таблицы, в которой находится значение первой функции ограничения  $g_1(x)$ .
- В предлагаемом раскрывающемся списке операций сравнения выбрать нужную операцию сравнения " = ".
- В окне поля ввода *Ограничение*: ввести значение, с которым сравнивается значение первой функции ограничения, а именно значение 4. Если это значение было уже предварительно введено в ячейку таблицы в качестве исходных данных, то можно вместо конкретного значения указать адрес ячейки, где находится это значение.
- Далее для ввода второго ограничения " $x_1 - x_2 + x_3 \leq 2$ " следует выбрать кнопку .
- В раскрывшемся окне диалога *Добавление ограничения* в окне поля ввода *Ссылка на ячейку*: указать адрес ячейки, где находится значение второй функции ограничения  $g_2(x)$ .
- В предлагаемом раскрывающемся списке операций сравнения выбрать нужную операцию сравнения "  $\leq$  ".
- В окне поля ввода *Ограничение*: ввести значение, с которым сравнивается значение второй функции ограничения, а именно значение 2. Если это значение было уже предварительно введено в ячейку таблицы в качестве исходных данных, то можно вместо конкретного значения можно указать адрес ячейки, где находится это значение.
- Для ввода третьего ограничения " $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$ " следует выбрать кнопку .
- В раскрывшемся окне диалога *Добавление ограничения* в окне поля ввода *Ссылка на ячейку* указать адреса ячеек, где находятся начальные значения решения задачи  $x_1, x_2, x_3$ .
- В предлагаемом раскрывающемся списке операций сравнения выбрать нужную операцию сравнения "  $\geq$  ".
- В окне поля ввода *Ограничение*: ввести значение, с которым сравниваются значения плана-решения задачи, а именно значение 0. Если это значение было уже предварительно введено в ячейку таблицы в качестве исходных данных, то можно указать адрес ячейки, где находится это значение.
- После ввода третьего ограничения выбрать кнопку .

*Замечание:* В задачах математического программирования в качестве ограничения часто задается условие неотрицательности значений  $x_j \geq 0, j = 1, \dots, n$ , которое можно указать как очередное ограничение в группе *Ограничения:*, как было описано выше. А также для его задания можно выбрать кнопку  и в раскрывшемся окне диалога *Параметры Поиска решения* (см. Рис.3.23), установить флажок  *Неотрицательные значения* и далее выбрать кнопку .



**Рис. 3.23** Окно диалога *Параметры поиска решения*

*Замечание:* С помощью модуля *Поиск решения* решаются задачи как линейного, так и нелинейного программирования. Для того чтобы получить решение задачи линейного программирования следует в окне диалога *Поиск решения* выбрать кнопку  и в раскрывшемся окне диалога *Параметры Поиска решения* установить флажок  *Линейная модель*, а в случае решения задачи нелинейного программирования снять флажок  *Линейная модель* и далее выбрать кнопку .

- Для поиска решения задачи выбрать кнопку  в окне диалога *Поиск решения*.
- *Microsoft Excel* подберет подходящее решение и сообщение о найденном решении появится в окне диалога *Результаты поиска решения* (см. Рис.3.24).
- Найденное решение сохранить с помощью кнопки  или клавиши *Enter*.
- Если *Microsoft Excel* не сможет подобрать подходящего решения, то в окне диалога *Результаты поиска решения* появится соответствующее сообщение (см. Рис.3.25).

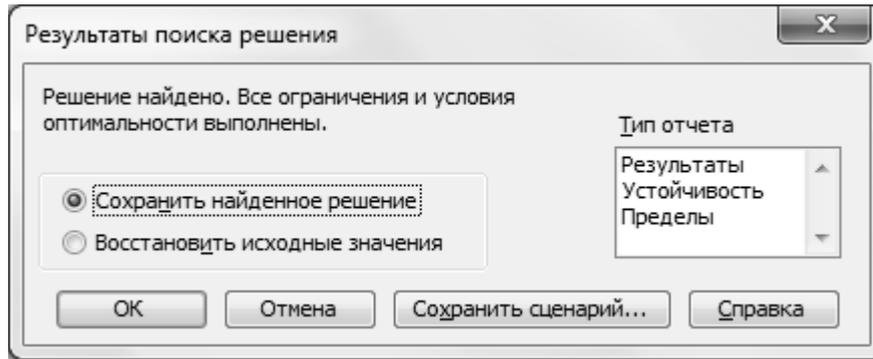


Рис. 3.24 Окно диалога *Результаты поиска решения*

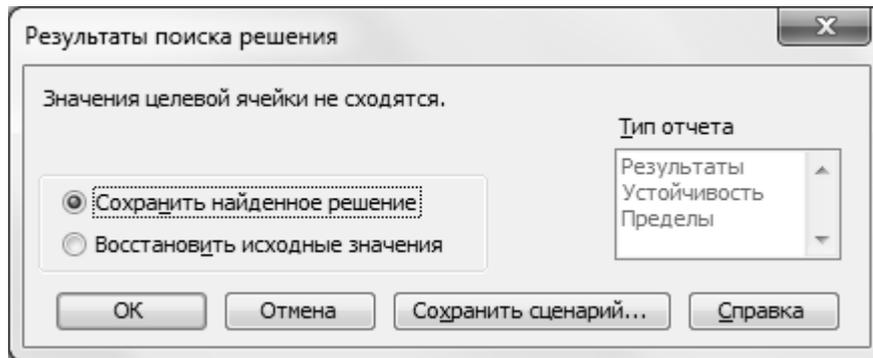


Рис. 3.25 Окно диалога *Результаты поиска решения*

- В результате чего следует выбрать кнопку **Отмена** или нажать клавишу *Esc*. Далее следует проверить все введенные значения и заново решить задачу.

### «Задача о рюкзаке»: оптимальное управление поставками

Имеется  $n$  видов товаров, которые необходимо поставить со склада в магазин с использованием транспортного средства.

Определим параметры задачи:

$v_i$  – объем запаса  $i$ -го товара на складе,  $i=1, \dots, n$ ;

$z_i$  – минимально допустимый объем поставки  $i$ -го товара,  $i=1, \dots, n$ ;

$w_i$  – вес  $i$ -го товара,  $i=1, \dots, n$ ;

$p_i$  – стоимость единицы  $i$ -го товара,  $i=1, \dots, n$ ;

$W$  – грузоподъемность транспортного средства.

План задачи  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – вектор объемов поставки товаров.

Очевидно, что допустимый план задачи должен удовлетворять условиям:

$$\sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i \leq W, \quad z_i \leq x_i \leq v_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Введем целевую функцию стоимости поставки:  $F(x) = \sum_{i=1}^m p_i \cdot x_i$ .

*Задача:* требуется определить план поставки товаров, который обеспечит максимум функции стоимости с учетом ограничений.

*Математическая модель задачи:*

$$F(x) = \sum_{i=1}^m p_i \cdot x_i \rightarrow \max$$

$$\sum_{i=1}^m w_i \cdot x_i \leq W, \quad z_i \leq x_i \leq v_i, \quad i = 1, \dots, m$$

**Вариант №1.**  $W = 5\,500$

Показатели		Товары							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Мин. объем поставки (ед.)	$z$	5	5	10	10	15	15	5	10
Объем запаса (ед.)	$v$	14	10	30	16	30	35	15	18
Стоимость (у.е.)	$p$	20	12	8	10	5	25	9	30
Вес (кг.)	$w$	67	25	26	35	24	70	30	95

**Вариант №2.**  $W = 6\,000$

Показатели		Товары						
		1	2	3	4	5	6	7
Мин. объем поставки (ед.)	$z$	5	5	1	20	5	10	1
Объем запаса (ед.)	$v$	10	15	7	40	18	26	9
Стоимость (у.е.)	$p$	32	30	60	10	15	22	43
Вес (кг.)	$w$	50	45	120	75	30	65	95

### Транспортная задача

Имеется  $m$  складов, с которых необходимо поставить товар в  $n$  магазинов.

Пусть заданы следующие величины:

$a_i$  – объем запасов товара (ед.) на  $i$ -м складе,  $i = 1, \dots, m$ ;

$b_j$  – объем потребностей в товаре  $j$ -м магазине,  $j = 1, \dots, n$ ;

$c_{ij}$  – транспортные издержки, связанные с поставкой единицы товара с  $i$ -го склада в  $j$ -й магазин,  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ .

Модель транспортной задачи называется *закрытой*, если выполняется условие:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \text{ Иначе, модель называется } \textit{открытой}.$$

Методы оптимизации применяются только к закрытой модели. Поэтому, если модель открытая, то она преобразуется в закрытую посредством добавления:

– фиктивного  $m+1$ -го склада, если объем потребностей в товаре больше объема за-

пасов на складах. При этом  $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ ,  $c_{m+1j} = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ ;

– фиктивного  $n+1$ -го магазина, если объем запасов товара больше объема потреб-

ностей. При этом  $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ ,  $c_{in+1} = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Введем *план задачи* – план поставок товара со складов в магазины:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix},$$

где  $x_{ij}$  – это объем поставки товара с  $i$ -го склада в  $j$ -й магазин,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

На план задачи накладываются следующие *ограничения*:

$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  – суммарный объем поставок товара со склада должен быть равен

объему запасов товара на складе;

$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  – суммарный объем поставок товара в магазин должен быть равен

объему потребности магазина в товаре;

$x_{ij} \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  – условие неотрицательности плана задачи;

$x_{ij}$  – целое число,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  – условие целочисленности плана задачи.

Определим целевую функцию суммарных издержек, связанных с поставками товара

со складов в магазины:  $C(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}$ .

*Задача*: требуется организовать поставки товара со складов в магазины так, чтобы минимизировать суммарные издержки

*Математическая модель задачи*:

$$C(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad x_{ij} - \text{целое число}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

**Вариант №1**

Запасы на складах	Торговые точки						
	1	2	3	4	5	6	7
650	2	3	3	7	4	1	3
550	9	5	7	8	1	5	8
800	5	8	6	9	3	7	2
<b>Потребности торговых точек</b>	200	270	310	350	260	320	290

**Вариант №2**

Запасы на складах	Торговые точки					
	1	2	3	4	5	6
420	8	2	6	4	3	7
730	5	1	6	9	8	3
500	7	9	4	7	2	5
600	4	6	3	5	8	4
<b>Потребности торговых точек</b>	400	670	280	210	460	230

**Задача о назначениях**

В распоряжении руководства предприятия имеется  $n$  работников, которые могут выполнить  $n$  различных работ. Задана полезность  $a_{ij}$  (в баллах от 0 до 9), связанная с исполнением  $i$ -м работником  $j$ -ой работы, где  $i=1, \dots, n$ ,  $j=1, \dots, n$ .

**Задача:** необходимо закрепить за работниками предприятия работы таким образом, чтобы добиться максимальной полезности при условии, что каждый работник может выполнить только одну работу и каждая работа может быть выполнена только одним работником.

Введем *план задачи* – план распределения работ между работниками предприятия:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}, \text{ где } x_{ij} = 1, \text{ если за } i\text{-м работником закрепляется } j\text{-я работа, и } x_{ij}$$

$= 0$  – в противном случае,  $i=1, \dots, n$ ,  $j=1, \dots, n$ .

На план задачи накладываются следующие *ограничения*:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = 1, \dots, n \text{ – каждая работа выполняется одним работником;}$$

$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i=1, \dots, m$  – каждый работник выполняет одну работу;

$x_{ij} = \{0; 1\}, i=1, \dots, n, j=1, \dots, n$  – условие бинарности плана задачи.

Математическая модель задачи:

$$Z(x_{ij}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \max,$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j=1, \dots, n, \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i=1, \dots, m,$$

$$x_{ij} = \{0; 1\}, i=1, \dots, n, j=1, \dots, n$$

### Вариант №1

Работники	Работы					
	1	2	3	4	5	6
1	3	6	7	1	2	3
2	4	5	1	2	8	1
3	1	2	4	6	4	3
4	5	7	2	3	3	4
5	8	1	1	4	5	2
6	1	3	5	8	1	7

### Вариант №2

Работники	Работы				
	1	2	3	4	5
1	5	2	4	9	0
2	3	4	7	8	4
3	0	3	9	0	6
4	8	6	9	4	2
5	2	3	1	9	7

## Критерии теории игр с «природой»

Вероятностный и конфликтный характер бизнес-процессов, позволяет применять для принятия управленческих решений методы теории игр.

В ходе практической деятельности часто возникают ситуации, в которых взаимодействующие стороны преследуют различные интересы и достигают своей цели различными путями. Столкновение противоположных интересов сторон приводит к конфликтным ситуациям, в которых стороны должны принять соответствующие решения. При этом задача принятия решения усложняется отсутствием достаточной информации о сложившейся ситуации, то есть решение принимается сторонами в условиях неопределенности.

Игра в шахматы, шашки, карточные игры, игра в кости, в рулетку – примеры игр, в ходе которых возникают конфликтные ситуации. Неопределенность в играх может быть связана с правилами игры, которые предполагают слишком большое разнообразие вариантов ее развития, что делает невозможным предсказание результата, например, шахматная игра. Это так называемые *комбинаторные игры*.

Неопределенность может быть связана и с влиянием множества случайных факторов, которые возникают в ходе игры, например, в карты, в кости, в рулетку. Такие игры называются *азартными*.

Источником неопределенности может быть и отсутствие информации о действиях противоположной стороны, стратегии ее поведения. Такие игры называются *стратегическими*. Примерами таких игр являются военные действия, действия конкурентов на рынке, проведение научного эксперимента.

Количественные методы принятия решений в условиях конфликтной ситуации и неопределенности разрабатываются в рамках теории игр.

*Теория игр* – это раздел прикладной математики, предметом которого является изучение математических моделей конфликтных ситуаций и соответствующих методов принятия оптимальных решений.

В теории игр используется соответствующая терминология: *игроки* – стороны, участвующие в конфликте, *выигрыш* – исход конфликта. Если в игре участвуют два игрока, то игра называется *парной*. Парные игры просты для анализа и имеют наибольшее практическое применение.

Пусть в парной игре участвуют игроки *A* и *B*. Последовательность их действий, в соответствии с определенными правилами собственно и называется *игрой*. Выбор и осуществление игроком действия называется *ходом*. План, по которому игрок совершает ходы в различных ситуациях при фактическом наличии необходимой ин-

формации, называется *стратегией* игрока. Если интересы участников игры поддаются количественному описанию, то результат игры – *выигрыш* – является числом.

Простейшим случаем стратегической игры является *игра двух лиц с нулевой суммой*, то есть когда сумма выигрышей сторон равна нулю. Игра состоит из двух ходов: игрок  $A$  выбирает стратегию  $A_i$ ,  $i=1, \dots, m$  из множества возможных для него стратегий  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , а игрок  $B$  выбирает стратегию  $B_j$ ,  $j=1, \dots, n$  из множества возможных стратегий  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . При этом игроки совершают свои ходы при полном отсутствии информации о выборе противоположной стороны.

Пусть  $a_{ij}$  – выигрыш игрока  $A$ , если он выбрал стратегию  $A_i$ , а игрок  $B$  выбрал стратегию  $B_j$ . Тогда для парной игры можно построить *матрицу выигрышей*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Если в парной игре игроком  $A$  является человек, – лицо, принимающее решение, а в качестве игрока  $B$  – объективная действительность, процесс или явление, на который ЛПР, как правило, не может оказать какое-либо прямого воздействия, то игрок  $B$  называется «природой», а имеет место *игра с «природой»*.

В играх с «природой» игрок  $A$  действует осмотрительно, выбирая стратегию в соответствии с определенным критерием оптимальности, а игрок  $B$  действует случайно, принимая те или иные возможные состояния.

Пусть в распоряжении ЛПР имеется  $m$  стратегий, а «природа» может принять  $n$  возможных состояний, которые образуют полную группу событий.

*Критерий Байеса.* Предположим, что известны значения вероятностей  $p_j$  наступления каждого из состояний «природы»  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Очевидно, что должно выполняться условие:

$\sum_{j=1}^n p_j = 1$ . Тогда из множества стратегий  $A_1, A_2, \dots, A_m$  выбирается

такая  $A_i$ , которая обеспечивает максимум математического ожидания выигрыша:

$$\alpha_B = \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j \quad (3.64)$$

Если вероятности задаются для каждого состояния «природы» с учетом возможных стратегий ЛПР, то есть задается матрица вероятностей  $P = (p_{ij})_{m \times n}$ , где

$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, i = 1, \dots, m$ , то имеет место следующая формула критерия оптимальности:

$$\alpha_B = \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij} p_{ij} \quad (3.64')$$

*Критерий Лапласа.* Если состояния «природы»  $V_1, V_2, \dots, V_n$  равновероятны, то формула критерия Байеса (3.62) принимает следующий вид:

$$\alpha_L = \max_i \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad (3.65)$$

*Критерий Гурвица.* Если учитывать только минимальный и максимальный выигрыши, получаемые при выборе каждой из стратегий ЛПР  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , и на основе этих значений построить линейную комбинацию выигрышей с использованием параметра  $0 \leq w \leq 1$ , то имеет место следующая формула:

$$\alpha_G = \max_i \{ w \min_j a_{ij} + (1-w) \max_j a_{ij} \} \quad (3.66)$$

Значение  $w$  выбирается ЛПР на основе субъективной оценки ситуации, в которой принимается решение. Чем больше у ЛПР имеется желания подстраховаться, тем ближе к 1 выбирается значение  $w$ , в частности, если  $w = 1$ , то имеет место *максимальный критерий Вальда*:

$$\alpha_B = \max_i \min_j a_{ij} \quad (3.67)$$

*Критерий минимального риска Сэвиджа.* В качестве оптимальной выбирается та стратегия, при которой минимизируется максимальный риск, связанный с каждой из стратегий ЛПР:

$$\alpha_C = \min_i \max_j r_{ij} \quad (3.68)$$

где  $r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$  – риск, возникающий в случае, если «природа» приняла состояние  $V_j$ , а ЛПР выбрал стратегию  $A_i$ . Таким образом, чем меньший выигрыш  $a_{ij}$  обеспечивает выбор стратегии  $A_i$ , в предположении, что «природа» приняла состояние  $V_j$ , тем больше значение риска  $r_{ij}$ . На основе вычисленных значений рисков строится матрица рисков  $R = (r_{ij})_{m \times n}$ .

*Замечание.* При использовании указанных критериев необходимо учитывать, что получаемое оптимальное решение может быть не единственным.

### Выбор оптимального плана продаж

Предприятие торговли разработало несколько вариантов плана продаж товаров на предстоящий период с учетом возможных состояний конъюнктуры рынка. В таблице представлены планируемые значения величины прибыли (в у. е.) и вероятности состояний конъюнктуры рынка  $p$ . Определить оптимальный план продажи товаров, используя критерии игр с «природой».

План продаж	Состояния конъюнктуры рынка			
	К1	К2	К3	К4
П1	420	850	550	300
П2	870	310	530	470
П3	690	180	350	280
П4	260	620	740	970
$p$	0,4	0,3	0,2	0,1

### Выбор оптимального ассортиментного плана

Отдел маркетинга предприятия торговли разработал несколько вариантов товарного ассортимента с учетом возможных состояний конъюнктуры рынка. Специалистами отдела определены значения весовых коэффициентов (в баллах от 0 до 9), характеризующие эффективность каждого из вариантов при различных состояниях внешней среды, а также вероятности состояний  $p$ . Определить оптимальный ассортиментный план, используя критерии игр с «природой».

Варианты товарного ассортимента	Состояния конъюнктуры рынка					
	P1	P2	P3	P4	P5	P6
V1	5	7	2	4	3	6
V2	2	7	9	3	7	8
V3	8	2	3	1	4	2
V4	3	8	5	9	1	7
$p$	0,1	0,2	0,25	0,25	0,1	0,1

### Выбор оптимальной стратегии корпоративных продаж

Предприятию торговли предлагается продвижение на корпоративном рынке трех новых альтернативных видов промышленной продукции  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  в условиях неясной рыночной конъюнктуры, относительно которой известны ее возможные состояния  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ , их вероятности  $p$ , а также величины получаемой прибыли (в у. е.)

от реализации каждого из видов продукции. Определить оптимальную стратегию продвижения, используя критерии игр с «природой».

Вид продукции	Состояния конъюнктуры рынка			
	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
$\Pi_1$	570	490	380	250
$\Pi_2$	250	730	400	390
$\Pi_3$	600	850	180	290
$p$	<b>0,3</b>	<b>0,25</b>	<b>0,25</b>	<b>0,2</b>

### *Выбор оптимального проекта гостиницы*

Строительная компания планирует строительство гостиницы в курортном районе. При этом возможно реализовать несколько проектов гостиниц, которые отличаются друг от друга количеством мест. Изучение работы подобных гостиниц в данном районе позволило определить возможную наполняемость (в %) гостиницы для каждого из вариантов в различные времена года, а также среднюю дневную прибыль в расчете на одно место (см. таблицу). Определить оптимальный проект гостиницы, используя критерии игр с «природой».

Проекты гостиниц (количество мест)	Времена года				Дневная прибыль в расчете на одно место (у. е.)
	Зима	Весна	Лето	Осень	
100	85%	40%	95%	80%	10
150	50%	30%	90%	70%	15
200	30%	30%	90%	40%	17
250	25%	20%	85%	30%	20

### *Выбор оптимального объема закупки товара*

Отдел закупок предприятия торговли планирует закупку товара на очередной период времени. Распределение спроса на товар за предыдущие периоды представлено в таблице. Потери, связанные с отсутствием спроса и потери, связанные с дефицитом в расчете на единицу товара в течение планового периода, характеризуются соответствующими весовыми коэффициентами  $0 < s < 10$ ,  $0 < d < 10$ ,  $s + d = 10$ . Определить оптимальный объем закупки, используя критерии игр с «природой».

**Вариант №1**

$s = 4, d = 6$

Спрос на товар		Частоты
0	50	32
50	100	53
100	150	40
150	200	63
200	250	12

**Вариант №2**

$s = 5, d = 5$

Спрос на товар		Частоты
0	20	5
20	40	23
40	60	74
60	80	93
80	100	46
100	120	9

**Выбор оптимального объема обслуживания покупателей**

Пусть интенсивность  $\lambda$  входящего в систему торгового обслуживания (СОТ) потока покупателей определяется законом распределения:

$\lambda$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	...	$\lambda_n$
$p$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Интенсивность потока определяется как количество покупателей в единицу времени.

Заданы значения (в баллах от 0 до 5) издержек  $c_0$  и  $c_S$ , связанных, соответственно, с отказом в обслуживании и с обслуживанием одного покупателя.

Примем в качестве  $j$ -го состояния «природы» значение интенсивности входящего потока покупателей  $\lambda_j, j = 1, \dots, n$ , а в качестве  $i$ -ой стратегии лица, принимающего решение – соответствующий интенсивности входящего потока покупателей  $\lambda_i$  объем обслуживания  $x_i: x_i = \lambda_i, i = 1, \dots, n$ .

Построим матрицу выигрышей  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ , элементы которой вычисляются следующим образом (см. таблицу):  $a_{ij} = \begin{cases} -c_0(\lambda_j - x_i), x_i < \lambda_j \\ -c_S(x_i - \lambda_j), x_i \geq \lambda_j \end{cases}$ .

Стратегии ЛПР	Интенсивность входящего потока покупателей			
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	...	$\lambda_n$
$x_1 = \lambda_1$	0	$-c_0(\lambda_2 - x_1)$	...	$-c_0(\lambda_n - x_1)$
$x_2 = \lambda_2$	$-c_S(x_2 - \lambda_1)$	0	...	$-c_0(\lambda_n - x_2)$
...	...	...	...	...
$x_n = \lambda_n$	$-c_S(x_n - \lambda_1)$	$-c_S(x_n - \lambda_2)$	...	0
$p$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

Требуется выбрать оптимальный объем обслуживания  $x$ , используя:

- критерий Байеса;
- другие указанные выше критерии, приняв, что все состояния «природы» равновероятны:  $p_j = 1/n, j = 1, \dots, n$ .

### Вариант №1

$$c_0 = 5, c_S = 3$$

$\lambda$	15	20	25	30
$p$	0,20	0,30	0,30	0,20

### Вариант №2

$$c_0 = 4, c_S = 2$$

$\lambda$	5	10	15	20
$p$	0,10	0,40	0,35	0,15

## Глава II. Технологии работы с базами данных

*Базой данных (БД)* называется совокупность структурированных данных об определенной предметной области, расположенная на внешнем запоминающем устройстве компьютера.

*Предметная область* – это часть действительного мира, представленная как множество взаимосвязанных предметов, которые являются объектами исследования и управления. Например, предметная область «товарный ассортимент» включает множество реализуемых предприятием товаров, а предметная область «персонал» включает работников предприятия.

Предметы обладают набором релевантных для целей исследования и управления свойств. Например, товары обладают такими свойствами, как название, артикул, вес, размер, цвет, цена. Свойствами работников, как объектов управления, являются их возраст, уровень образования, рабочий стаж, должность.

База данных является способом формализованного описания предметной области с целью учета входящих в нее предметов и их свойств. Соответственно, структура базы данных должна обеспечивать запись и надежное хранение данных о предметах, быстрый доступ к данным и их эффективную обработку.

Основными структурными элементами базы данных является *поле* и *запись*.

*Поле* – это логически неделимый элемент базы данных, который предназначен для хранения значений какого-либо свойства предмета. Поле имеет *имя*, *структуру* и *значение*. *Имя поля*, как правило, совпадает с названием соответствующего свойства предмета. *Структура поля* определяет способ хранения значения данного свойства и включает *тип* и *длину* поля. Физически поле можно представить как абстрактную ячейку памяти определенного размера (*длины*), предназначенную для хранения данных определенного *типа* (число, текст, объект и т. д.).

Совокупность взаимосвязанных полей базы данных образует *запись*. Таким образом, запись позволяет описать определенный предмет области, как совокупность значений его свойств. Совокупность записей образует *базу данных*.

В основе структуры базы данных лежит определенная *модель данных* – некоторое представление о типах данных и связях между ними. Фактически, модель данных определяет допустимые для описания предметной области типы данных и способы связи записей базы данных. Допустимые типы данных определяются возможностями аппаратной части компьютера и реализующего базу данных программного обеспечения.

В общем случае для построения баз данных можно использовать иерархические, сетевые и табличные структуры и соответствующие модели данных. Большинство современных баз данных основано на *реляционной модели данных*, которая предполагает использование наиболее простой в технологическом плане табличной структуры данных.

Основным понятием реляционной модели является *отношение* (*relation* – отношение, связь) – прямоугольная таблица, столбцы которой определяют свойства предмета и называются *атрибутами отношения*, а строки таблицы – записи базы данных или *кортежи*, – состоят из полей в которых хранятся значения атрибутов. Совокупность атрибутов образует *заголовок отношения*, который определяет единую структуру всех записей базы данных. Так как все записи реляционной базы данных имеют одинаковый состав и структуру полей, то, очевидно, понятие *атрибутов отношения* соответствует понятию *поле базы данных*.

Заголовок	<i>Атрибут<sub>1</sub></i>	<i>Атрибут<sub>2</sub></i>	...	<i>Атрибут<sub>m</sub></i>
1	<i>Поле</i>	...	...	...
Кортежи	...	...	...	...
<i>n</i>	...	...	...	...

Прикладная программа, предназначенная для создания и *ведения* базы данных (то есть ввода, корректировки, удаления и обработки данных, а также доступа к данным пользователей), называется *системой управления базами данных (СУБД)*.

Системы управления базами данных реализуются, как в виде программных комплексов, так и в виде программных модулей, встроенных в различные прикладные программы и инструментальные средства разработки программ. Табличный процессор *Microsoft Excel* включает встроенную реляционную СУБД, которая позволяет создавать базы данных на основе рабочих листов книги *Excel*. В терминологии *Microsoft Excel* база данных называется *списком* или *таблицей*.

## §4. Подготовка данных

### Создание базы данных

#### Описание структуры базы данных.

Для задания структуры базы данных в первой строке электронной таблицы следует ввести названия полей базы данных и отформатировать заполненные ячейки таблицы.

#### Определение границ базы данных.

Данная операция определяет границы области базы данных - количество полей и количество записей в базе данных. Для определения границ области базы данных следует установить табличный курсор в одну из ячеек таблицы и выбрать вкладку *Вставка* → группу *Таблицы* → кнопку *Таблица*. В результате загрузится окно диалога *Создание таблицы* (см. Рис.4.1), в котором в окне ввода *Укажите расположение данных таблицы:* будет указан диапазон ячеек, на основе которого создается база данных и будет стоять флажок  *Таблица с заголовками*, который означает, что первая строка таблицы, которая содержит заголовками столбцов, является строкой заголовков полей базы данных.

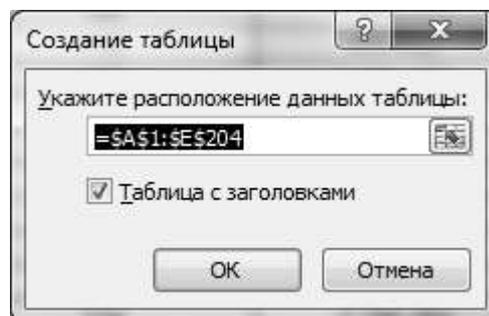
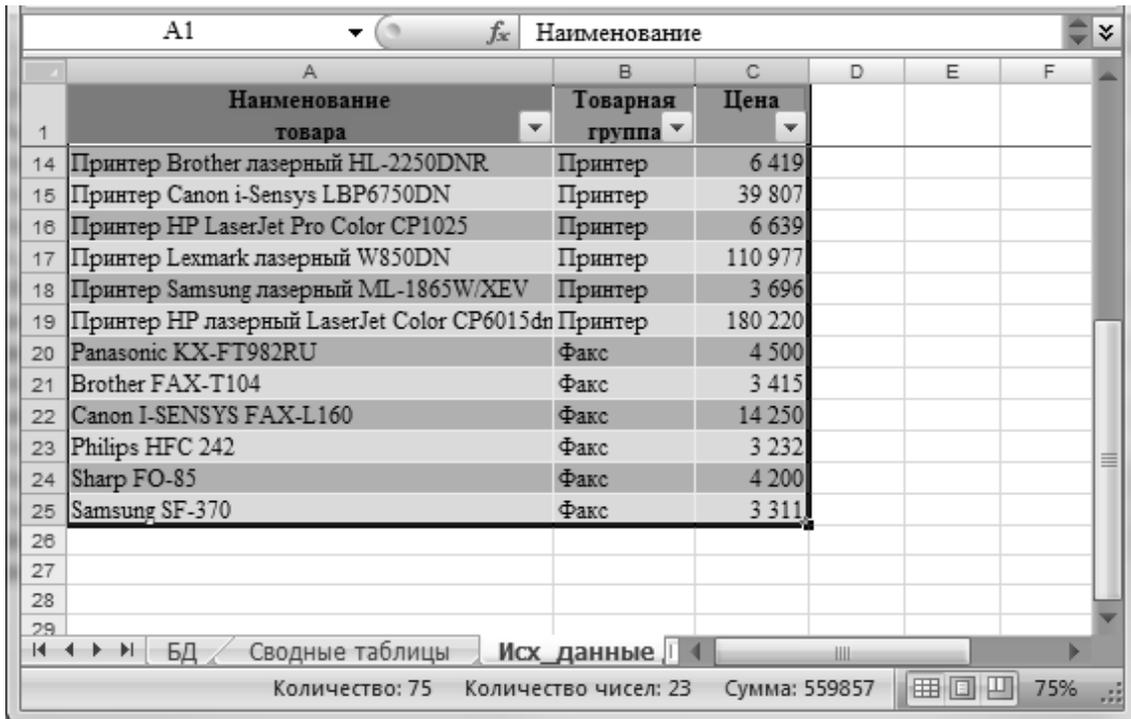


Рис. 4.1 Окно диалога *Создание таблицы*

В результате (см. Рис.4.2):

- таблице будет присвоено имя *Таблица 1*, которое будет использоваться во всех операциях по обработке базы данных – сортировка, фильтрация, сводные таблиц и др.;
- к таблице будет применен один из стилей оформления таблицы *Стиль таблицы: Средний 9*;
- около названия полей базы данных появятся символы , определяющие включение режима фильтрации записей базы данных *Фильтр* (*Ctrl + Shift + L*) (см. ниже *Фильтрация записей*);

- пользователь переключится на вкладку ленты *Данные*, где ему станет доступной большая часть операций, выполняемых над записями базы данных – сортировка, фильтрация записей, подведение итогов и др.;
- в последней ячейке таблицы (правый нижний угол) появится синий маркер, обозначающий границы базы данных, то есть ее размер. При подведении указателя мыши на него появляется двойная стрелка, с помощью которой можно изменять границы базы данных.



	A	B	C	D	E	F
1	Наименование товара	Говарная группа	Цена			
14	Принтер Brother лазерный HL-2250DNR	Принтер	6 419			
15	Принтер Canon i-Sensys LBP6750DN	Принтер	39 807			
16	Принтер HP LaserJet Pro Color CP1025	Принтер	6 639			
17	Принтер Lexmark лазерный W850DN	Принтер	110 977			
18	Принтер Samsung лазерный ML-1865W/XEV	Принтер	3 696			
19	Принтер HP лазерный LaserJet Color CP6015dn	Принтер	180 220			
20	Panasonic KX-FT982RU	Факс	4 500			
21	Brother FAX-T104	Факс	3 415			
22	Canon I-SENSYS FAX-L160	Факс	14 250			
23	Philips HFC 242	Факс	3 232			
24	Sharp FO-85	Факс	4 200			
25	Samsung SF-370	Факс	3 311			
26						
27						
28						
29						

**Рис. 4.2** Приобретение таблицей статуса базы данных

При вводе новых записей в базу данных синий маркер будет автоматически перемещаться и определять новые границы базы данных. При этом:

- автоматически будут обновляться ссылки на ячейки в созданных пользовательских именах;
- формат ячеек и формулы, находящиеся в ячейках базы данных автоматически будут копироваться в ячейки для новых записей базы данных;
- автоматически будут обновляться ссылки на записи и поля базы данных в формулах, используемых в книге;
- автоматически будут определяться ссылки на базу данных, при построении сводных таблиц, диаграмм и др.

#### **Выделение полей и записей базы данных.**

В режиме, когда таблица рабочего листа имеет статус базы данных, можно использовать специальные указатели мыши для выделения записей и полей базы данных:

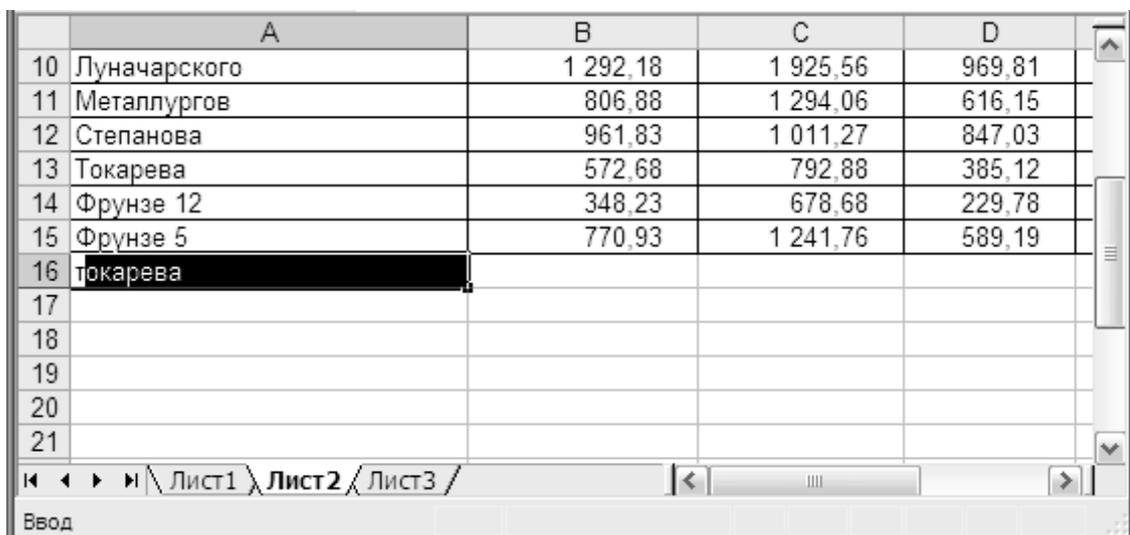
- символ , который появляется сверху над названием текущего поля базы данных. С помощью данного указателя мыши можно выделить поле базы данных или несколько полей;
  - символ , который появляется слева от текущей записи. С помощью данного указателя мыши можно выделить текущую запись или несколько записей;
  - символ , который появляется сверху слева над названием первого поля базы данных. С помощью данного указателя мыши можно выделить всю базу данных.
- Для выделения несмежных полей и записей базы данных можно использовать клавишу *Ctrl*.

## *Заполнение базы данных*

### **Ввод данных в базу данных**

Ввод данных в режиме таблицы выполняется стандартным способом - ввод данных с клавиатуры. При вводе повторяющихся текстовых значений в ячейки таблицы с клавиатуры, табличный процессор *Microsoft Excel* формирует из введенных ранее в один столбец текстовых значений список, который можно использовать одним из следующих способов:

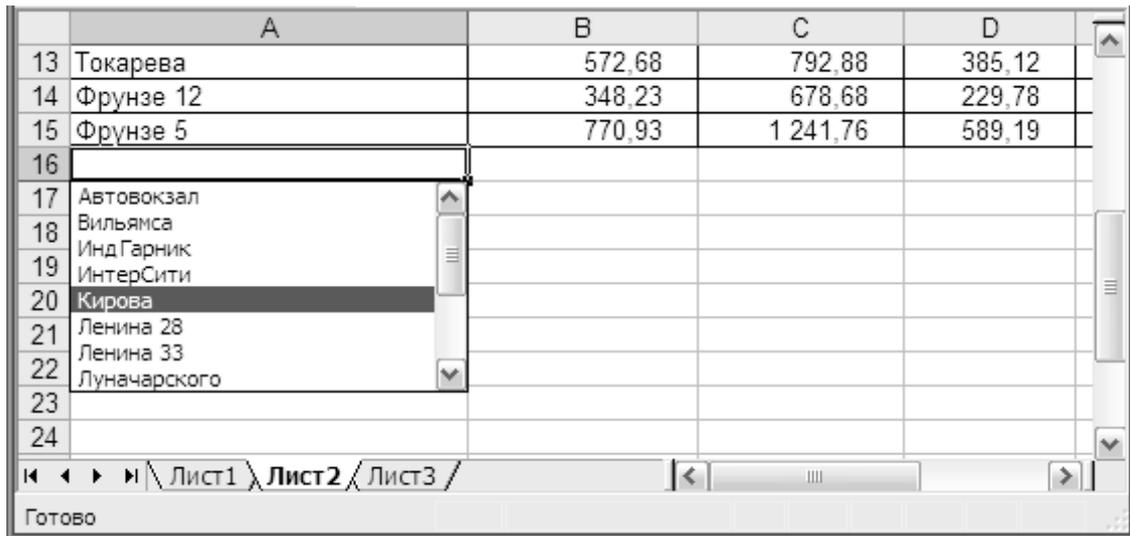
*1-й способ - Автозавершение значений ячеек.* При вводе в ячейку новой строки таблицы первого символа текстового значения, если это значение совпадает по значению с каким-либо значением, введенным уже ранее в этот же столбец, то табличный процессор *Microsoft Excel* автоматически заносит этот текст в ячейку таблицы. И пользователь может или подтвердить ввод этого значения в ячейку таблицы или ввести новое значение (см. Рис.4.3).



	A	B	C	D
10	Луначарского	1 292,18	1 925,56	969,81
11	Металлургов	806,88	1 294,06	616,15
12	Степанова	961,83	1 011,27	847,03
13	Токарева	572,68	792,88	385,12
14	Фрунзе 12	348,23	678,68	229,78
15	Фрунзе 5	770,93	1 241,76	589,19
16	токарева			
17				
18				
19				
20				
21				

**Рис. 4.3** Режим Автозавершение значений ячеек

2-й способ - Выбор значений из раскрывающегося списка. Перед вводом текстового значения в ячейку новой строки таблицы следует вызвать контекстное меню к текущей ячейке и в раскрывшемся контекстном меню следует выбрать команду *Выбрать из раскрывающегося списка*. В результате к текущей ячейке раскроется список, состоящий из текстовых значений, ранее введенных в текущий столбец. И пользователь может выбрать любое подходящее значение (см. Рис.4.4).

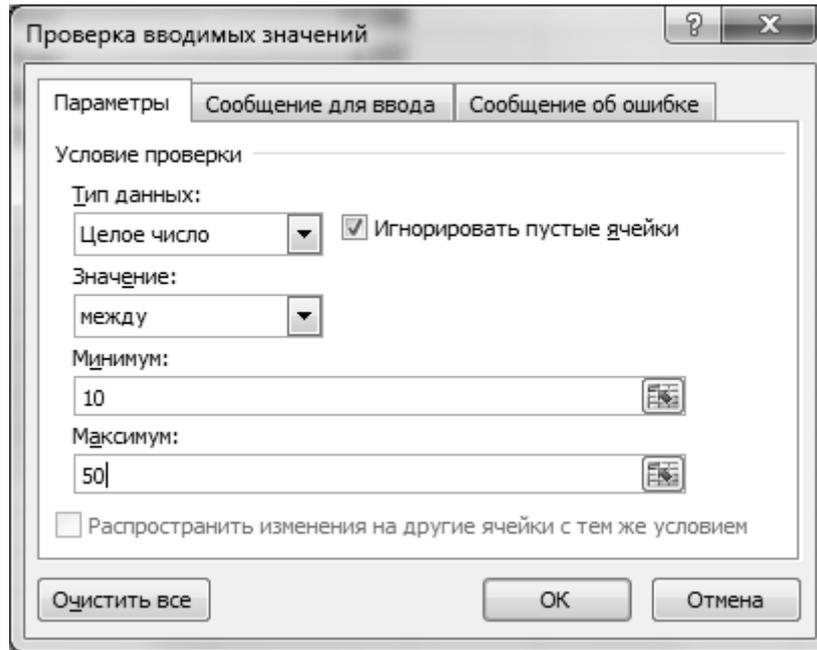


	A	B	C	D
13	Токарева	572,68	792,88	385,12
14	Фрунзе 12	348,23	678,68	229,78
15	Фрунзе 5	770,93	1 241,76	589,19
16				
17	Автовокзал			
18	Вильямса			
19	ИндГарник			
20	ИнтерСити			
21	Кирова			
22	Ленина 28			
23	Ленина 33			
24	Луначарского			

**Рис. 4.4** Режим *Выбор из раскрывающегося списка*

### Контроль ввода данных в ячейки таблицы

Зачастую в таблице возникает необходимость установки контроля значений данных, вводимых в ячейки таблицы. Например, следует в ячейки таблицы вводить или только положительные числа, или только целые числа, или числа из определенного числового диапазона, или текстовые значения с определенным количеством символов, или значения из заранее заданного списка значений и др. Для реализации в таблице данной возможности контроля ввода значений можно использовать вкладку *Данные* → группу *Работа с данными* → кнопку *Проверка данных*. В результате загрузится окно диалога *Проверка вводимых значений* (см. Рис.4.5), в котором можно установить следующие параметры контроля вводимых значений:



**Рис. 4.5** Окно диалога *Проверка вводимых значений*

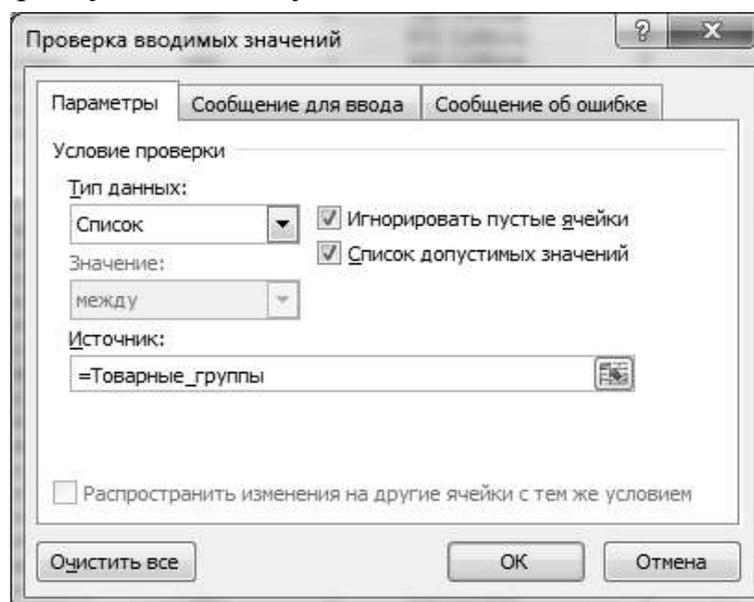
- На вкладке *Параметры* в раскрывающемся списке *Тип данных:* можно выбрать тип вводимых значений – *Целое число, Действительное, Список, Дата, Время, Длина текста* и др., а в следующих окнах ввода *Значение:* и *Источник:* следует задать параметры для контроля вводимых значений.
- На вкладке *Сообщение для ввода* в окнах ввода *Заголовок* и *Сообщение* можно ввести текст, который будет появляться на экране в виде подсказки к ячейке, если табличный курсор будет находиться на этой ячейке таблицы.
- На вкладке *Сообщение об ошибке* в окнах ввода *Заголовок* и *Сообщение* можно ввести текст, который будет появляться на экране, если в ячейку будет введено значение, которое не подходит под те параметры, который установил пользователь к текущей ячейке.

Если какое-либо поле в базе данных содержит повторяющиеся значения, то перед вводом значений в это поле на ячейки таблицы можно установить контроль на ввод значений только из заранее заданного списка значений. Другими словами, в ячейках таблицы можно организовать раскрывающийся список из заранее введенных значений, из которого пользователь может выбирать нужные значения для ввода. Этот режим ввода значений обеспечивает пользователю уменьшение количества ошибок при вводе данных в ячейки таблицы.

Для установки в ячейках таблицы раскрывающегося списка из заранее введенных значений следует:

- На рабочем листе создать таблицу, содержащую список допустимых значений.

- Выделить столбец базы данных, в котором каждая ячейка должна стать ячейкой с раскрывающимся списком значений.
- Выбрать вкладку *Данные* → группу *Работа с данными* → кнопку *Проверка данных*. В результате загрузится окно диалога *Проверка вводимых значений* (см. Рис.4.6), в котором на вкладке *Параметры* в группе *Условие проверки* в раскрывающемся списке *Тип данных*: выбрать вариант *Список*, а в окне ввода данных *Источник*: указать диапазон ячеек, в котором находится созданный справочник из заранее введенных значений, который должен находиться на этом же рабочем листе. В случае если диапазон ячеек, на который необходимо сослаться, находится на другом рабочем листе, то ему предварительно следует присвоить пользовательское имя (см. ниже *Создание пользовательских имен*), которое потом можно будет использовать в данном окне ввода *Источник*: (см. Рис.4.6).
- На вкладке *Сообщение для ввода* в окнах ввода *Заголовок* и *Сообщение* можно ввести текст, который будет появляться в виде подсказки к ячейке на экране, если табличный курсор будет находиться на этой ячейке таблицы. Например, это может быть подсказка, что данное поле является полем с раскрывающимся списком с заранее заданным набором готовых значений.
- На вкладке *Сообщение об ошибке* в окнах ввода *Заголовок* и *Сообщение* можно ввести текст, который будет появляться на экране, если в ячейку будет введено значение, которое отсутствует в заданном списке значений. Например, это может быть текст, напоминающий о том, что введенное значение отсутствует в заданном списке допустимых значений и следует сначала дополнить список новыми значениями, а потом приступить к вводу данных в ячейки таблицы.



**Рис. 4.6** Окно диалога *Проверка вводимых значений*

### **Создание пользовательских имен**

*Пользовательское имя* — это осмысленное краткое обозначение, позволяющее легче понять назначение ссылки на ячейку, диапазон ячеек, константы, формулы или таблицы.

При работе с базой данных необходимо присвоить пользовательское имя базе данных и создать пользовательские имена полей базы данных. Созданные пользовательские имена можно использовать в формулах при вычислениях, при построении диаграмм и в других операциях, выполняемых над записями и полями базы данных. Перед присвоением пользовательских имен следует предварительно выделить тот диапазон ячеек, которому присваивается имя. Это можно выполнить одним из следующих способов:

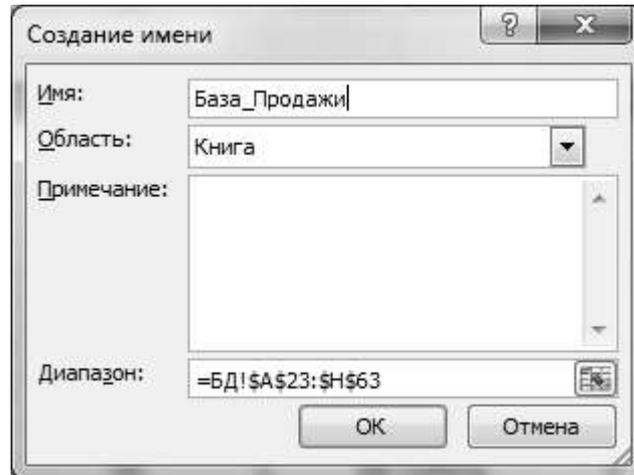
- Установить табличный курсор в ячейку таблицы, где находится название первого поля базы данных (левый верхний угол таблицы) и нажать комбинацию клавиш *Ctrl + Shift + →* и *Ctrl + Shift + ↓*. При этом выделятся все записи базы данных с первой по последнюю (база данных не должна содержать пустых строк и пустых столбцов). Если установить табличный курсор и в ячейку таблицы, где находится или название последнего поля базы данных (последняя ячейка первой строки таблицы), или в ячейку первого или последнего значения поля последней записи базы данных (первая или последняя ячейка последней строки таблицы), то при выделении в сочетании клавиш *Ctrl + Shift + ...* соответственно изменятся клавиши управления курсором.
- Установить табличный курсор в любую ячейку базы данных и далее нажать комбинацию клавиш *Ctrl + A*. В результате чего выделится вся база данных.
- Если таблица имеет статус базы данных, то для выделения записей базы данных можно использовать и специальные указатели мыши, которые появляются на границе списка:
  - символ  сверху над названием текущего поля базы данных - выделение поля базы данных;
  - символ  слева от текущей записи - выделение текущей записи;
  - символ  сверху слева над названием первого поля базы данных - выделение всей базы данных.

### **Присвоение имени базе данных**

- Выделить базу данных (способы выделения описаны выше).
- Выбрать вкладку *Формулы* → группу *Определенные имена* → кнопку с раскрывающимся списком *Присвоить имя* → команду *Присвоить имя...* В результате за-

грузится окно диалога *Создание имени* (см. Рис.4.7), в котором следует в поле ввода *Имя*: ввести имя базы данных. Введенное имя не должно содержать символы пробела и длина имени не должна превышать 255 символов. Символ пробела можно заменить на символ нижнего подчеркивания. Например:

База Продажи → База\_Продажи



**Рис. 4.7** Окно диалога *Присвоение имени*

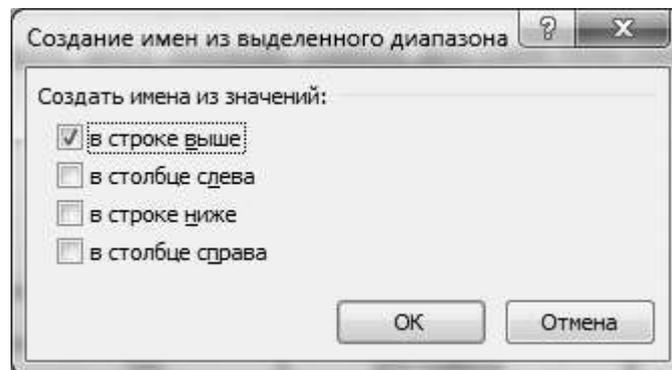
В поле ввода *Диапазон*: будет указан диапазон ячеек, в которых располагается база данных и которой присваивается пользовательское имя. Если диапазон ячеек, в которых располагается база данных, не был предварительно выделен перед вызовом окна диалога *Создание имени*, то на него можно сослаться в данном окне ввода *Диапазон*:. При выделении диапазона ячеек, в котором находится база данных, в этом случае также можно использовать сочетания клавиш, которые были описаны выше (*Ctrl + Shift + → ↓ ← ↑*).

Присвоение имени выделенному диапазону ячеек можно выполнить и без использования ленты. Для этого следует, после выделения нужного диапазона ячеек, слева от *Строки формул* в окне с раскрывающимся списком *Имя* ввести пользовательское имя с клавиатуры. Требования к имени те же самые - введенное имя не должно содержать символы пробела и длина имени не должна превышать 255 символов

### Создание имен полей базы данных

- Выделить базу данных (способы выделения описаны выше).
- Выбрать вкладку *Формулы* → группу *Определенные имена* → кнопку *Создать из выделенного фрагмента*. В результате загрузится окно диалога *Создание имен из выделенного фрагмента* (см. Рис.4.8), в котором в группе флажков *Создать имена из значений*: установить флажок  в строке *выше*, в результате чего будут со-

зданы пользовательские имена полей базы данных, совпадающих со значениями, находящимися в ячейках первой строки таблицы.



**Рис. 4.8** Окно диалога *Создать имена*

### Создание имен записей базы данных

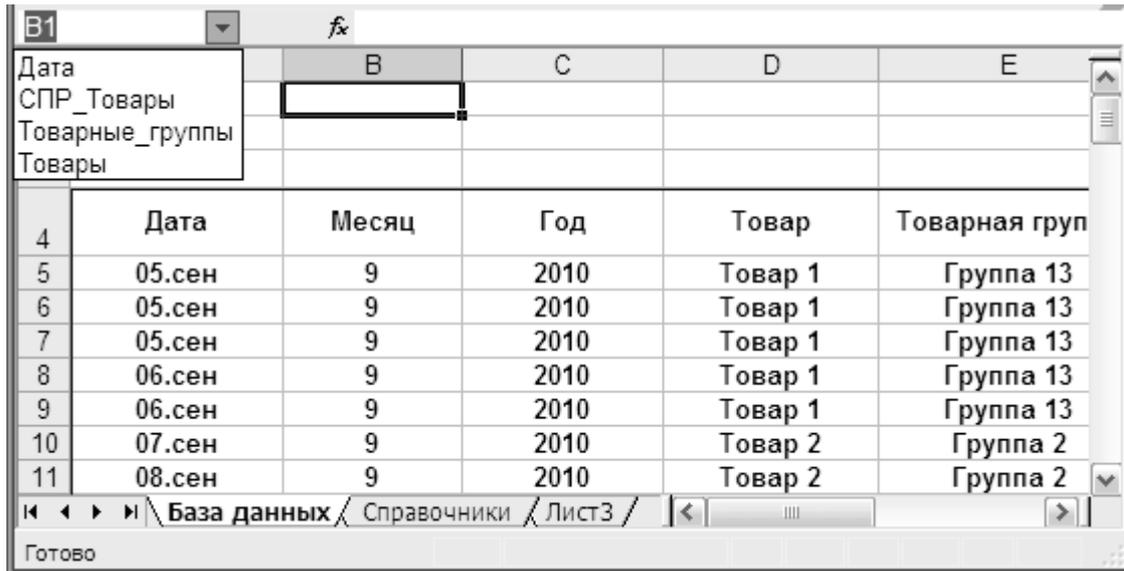
Для определения имен записей базы данных необходимо:

- Выделить базу данных (способы выделения описаны выше).
- Выбрать вкладку *Формулы* → группу *Определенные имена* → кнопку *Создать из выделенного фрагмента*. В результате загрузится окно диалога *Создание имен из выделенного фрагмента* (см. Рис.4.8), в котором в группе флажков *Создать имена из значений*: установить флажок  *в столбце слева*, в результате будут созданы имена – ключи для записей базы данных, совпадающих со значениями, находящимися в первом столбце таблицы.

Созданные пользовательские имена можно использовать в различных режимах по работе с базой данных – сортировка записей базы данных, выборка значений из базы данных, поиск значений в базе данных, фильтрация записей базы данных, построение сводных таблиц. Также их можно использовать в формулах при выполнении вычислений в качестве аргументов функций и при построении диаграмм. При этом созданные пользовательские имена являются абсолютными ссылками на ячейки, то есть при копировании адреса ячеек, имеющие пользовательские имена, изменяться не будут.

### Просмотр и выделение пользовательских имен в книге

Просмотр всех пользовательских имен в книге можно выполнить через раскрывающийся список *Имя*, находящийся слева от *Строки формул* (см. Рис.4.9). При этом обращение к списку пользовательских имен можно производить с любого рабочего листа книги.



**Рис. 4.9** Просмотр и выделение пользовательских имен

- Если в раскрывающемся списке имен выбрать имя базы данных, то текущим станет рабочий лист книги, на котором располагается база данных и при этом вся база данных будет выделена, включая заголовки полей базы данных.
- Если в раскрывающемся списке имен выбрать любое имя поля базы данных, то будет выделен диапазон ячеек - столбец со значениями выбранного поля, не включая первую ячейку столбца, в которой находится имя данного поля.
- Если в раскрывающемся списке имен выбрать любое имя записи базы данных, то будет выделен диапазон ячеек – это строка со всеми полями выбранной записи, не включая первую ячейку строки, в которой находится само имя записи.

### Вызов пользовательских имен при вычислениях в формулах и при построении диаграмм

Созданные пользовательские имена можно использовать в формулах при выполнении вычислений и при построении диаграмм. Для чего нужно, например, находясь в формуле выбрать вкладку *Формулы* → группу *Определенные имена* → кнопку с раскрывающимся списком *Использовать в формуле* → и далее выбрать нужное имя из списка имен книги. Более быстрый способ вызова списка пользовательских имен внутри формулы – это функциональная клавиша *F3*.

В результате загрузится окно диалога *Вставка имени*, в котором в списке имен *Имя:* следует выбрать нужное пользовательское имя (см. Рис.4.10).

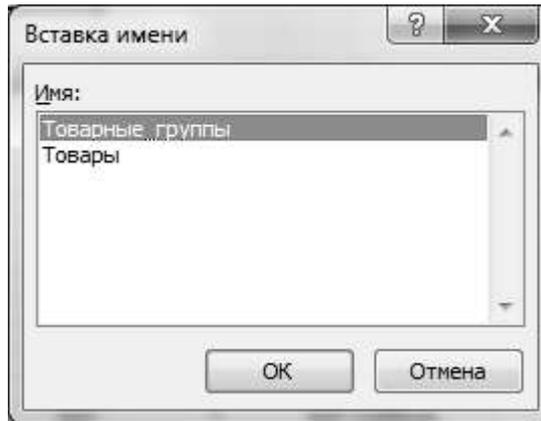


Рис. 4.10 Окно диалога *Вставка имени*

## §5. Обработка данных

### *Выборка значений из базы данных*

Выборка значений из базы данных осуществляется в соответствии с созданными пользовательскими именами в книге.

Если предварительно были созданы имена полей и имена записей базы данных, то для выборки нужного значения поля из конкретной записи следует использовать операцию пересечения диапазонов ячеек. Для этого в ячейку таблицы ввести формулу:

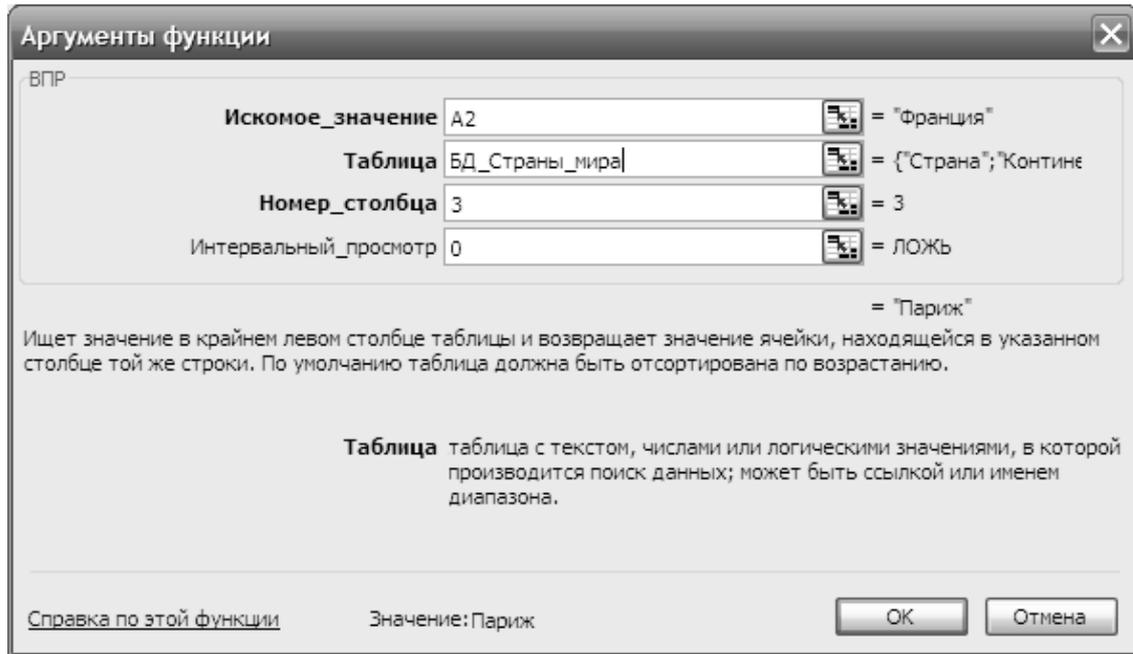
$$= \text{Имя\_записи} \_ \text{Имя\_поля},$$

где символ пробел « $\_$ » представляет собой операцию пересечения диапазонов ячеек в *Microsoft Excel*. Имена записей и имена полей в формулу можно вставить одним из перечисленных выше способов.

В результате вычислений по указанной формуле в ячейку таблицы будет возвращено значение ячейки, находящейся на пересечении указанной записи и указанного поля.

### *Поиск значений в базе данных*

Для поиска и выборки значений из базы данных можно использовать функцию *ВПР(...)* из категории *Ссылки и массивы* (см. Рис.5.1). Данная функция выполняет вертикальный поиск в первом столбце таблицы и возвращает значение из найденной строки и указанного столбца таблицы.



**Рис. 5.1** Окно диалога *Аргументы функции ВПР(..)*

*Аргументы функции ВПР(...):*

- искомое\_значение* – это значение, которое должно быть найдено в первом столбце таблицы (значение, ссылка на ячейку или текстовая строка). Текстовые строки сравниваются без учета регистра букв.
- таблица* – таблица с информацией, в которой ищется искомое значение (ссылка на диапазон ячеек или пользовательское имя);
- номер\_столбца* – это номер столбца в таблице, из которого выбирается искомое значение;
- интервальный просмотр* – это логическое значение, которое определяет, как табличный процессор Microsoft Excel ищет искомое значение в первом столбце таблицы:
  - 1 – если первый столбец таблицы отсортирован в порядке убывания значений,
  - 1 – если первый столбец таблицы отсортирован в порядке возрастания значений,
  - 0 – если первый столбец таблицы не отсортирован.

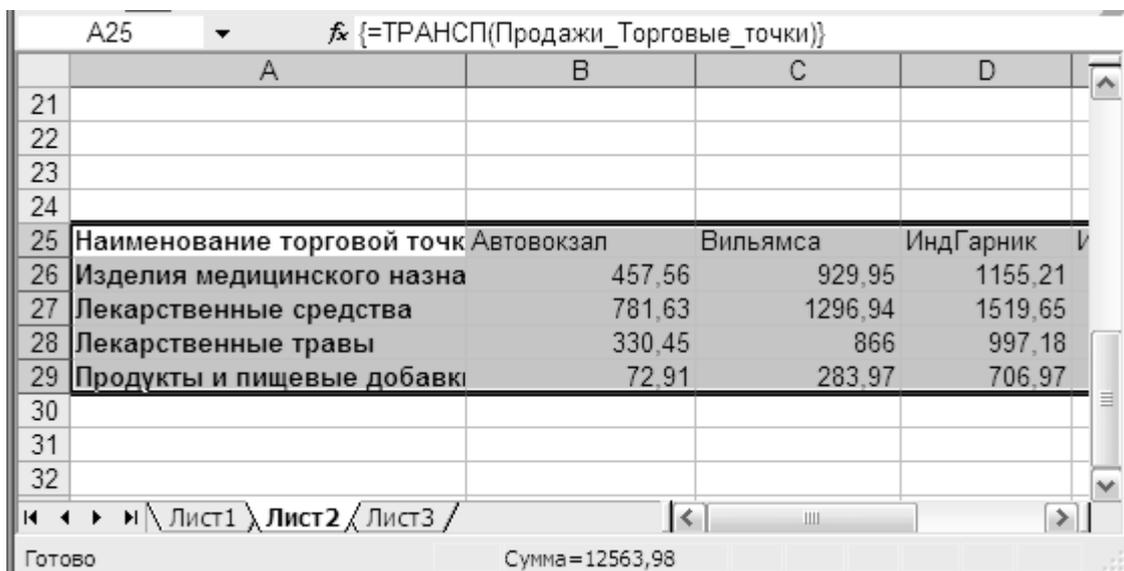
Иногда базу данных в табличном процессоре *Microsoft Excel* удобно представлять в горизонтальном виде, где строки таблицы – это поля базы данных, а столбцы – это записи базы данных. Для этого исходную базу данных следует транспонировать, то есть строки заменить столбцами, а столбцы заменить строками. Эту операцию можно выполнить с помощью функции *ТРАНСП(...)* из категории *Ссылки и массивы*. Перед выполнением этой операции предварительно следует посчитать количество

полей и количество записей в исходной базе данных. Это можно выполнить с помощью функций *ЧИСЛСТОЛЬ(...)* и *ЧСТРОК(...)* из категории *Ссылки и массивы*, которые определяют количество столбцов и количество строк, соответственно, в выделенном диапазоне смежных ячеек. В качестве аргументов у этих функций следует указать ссылку на базу данных. Если базе данных предварительно было присвоено пользовательское имя, то для вставки имени в формулу следует использовать или вкладку *Формулы* → группу *Определенные имена* → кнопку с раскрывающимся списком *Использовать в формуле* → выбрать нужное имя, или нажать функциональную клавишу *F3*.

Результатом выполнения функции *ТРАНСП(...)* должна стать база данных, в которой строки заменены на столбцы, а столбцы заменены на строки исходной базы данных. Но после выхода из *Мастера функций* результатом применения функции *ТРАНСП(...)* является одна заполненная ячейка таблицы. Для получения базы данных необходимо после выхода из *Мастера функций* выполнить следующую последовательность шагов, которая применяется при обработке массивов данных:

- Выделить область таблицы для результирующей базы данных, начиная с той ячейки, в которой записана функция *ТРАНСП(...)*.
- Нажать функциональную клавишу *F2* – режим редактирования ячейки таблицы.
- Нажать комбинацию клавиш *Ctrl + Shift + Enter*.

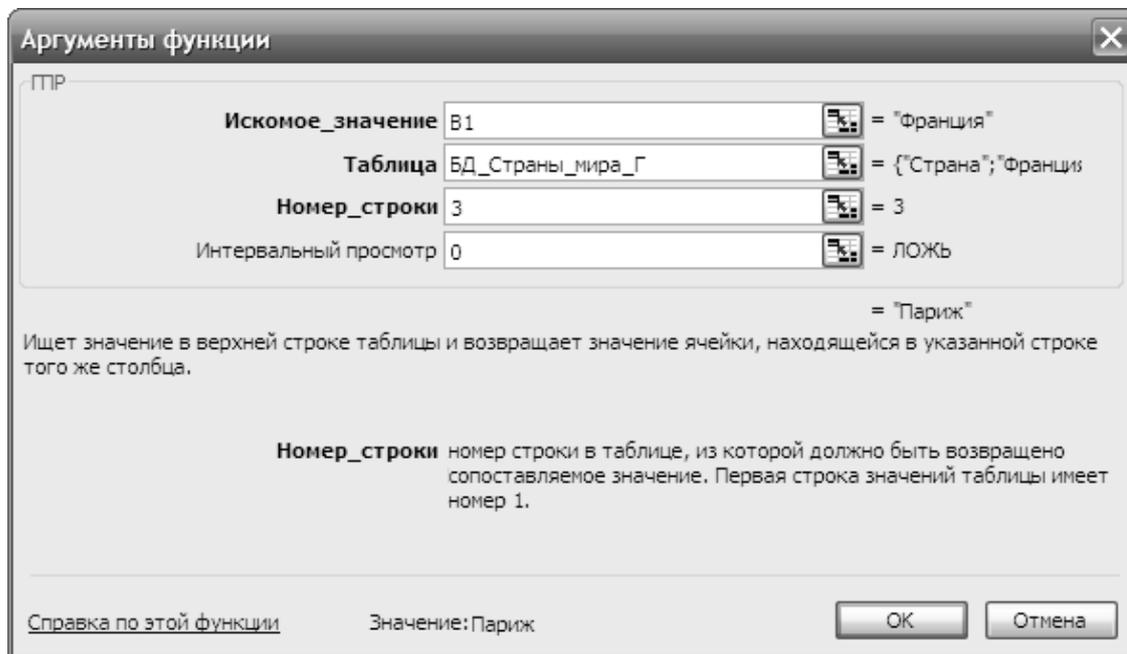
В результате табличный процессор *Microsoft Excel* заполнит выделенный диапазон ячеек базой данных, в которой строки заменены на столбцы, а столбцы на строки. Следует обратить внимание на формулу в *Строке формул* – само выражение формулы будет взято в фигурные скобки (см. Рис.5.2).



	A	B	C	D
21				
22				
23				
24				
25	Наименование торговой точки	Автовокзал	Вильямса	ИндГарник
26	Изделия медицинского назначения	457,56	929,95	1155,21
27	Лекарственные средства	781,63	1296,94	1519,65
28	Лекарственные травы	330,45	866	997,18
29	Продукты и пищевые добавки	72,91	283,97	706,97
30				
31				
32				

**Рис. 5.2** Результат выполнения функции *ТРАНСП(..)*

Для поиска и выборки значений из базы данных, которая представлена уже в горизонтальном виде (строки – это поля, а столбцы – это записи базы данных), можно использовать функцию *ГПР(...)* из категории *Ссылки и массивы* (см. Рис.5.3).



**Рис. 5.3** Окно диалога *Аргументы функции ГПР(..)*

Данная функция выполняет горизонтальный поиск в первой строке таблицы и возвращает значение из найденного столбца и указанной строки таблицы.

*Аргументы функции ГПР(...):*

- искомое\_значение* – это значение, которое должно быть найдено в первой строке таблицы (значение, ссылка на ячейку или текстовая строка). Текстовые строки сравниваются без учета регистра букв.
- таблица* – таблица с информацией, в которой ищется искомое значение (ссылка на диапазон ячеек или пользовательское имя);
- номер\_строки* – это номер строки в таблице, из которой выбирается найденное значение;
- интервальный\_просмотр* – это логическое значение, которое определяет, как табличный процессор Microsoft Excel ищет искомое значение в первой строке таблицы:
  - 1 – если первая строка таблицы отсортирована в порядке убывания значений,
  - 1 – если первая строка таблицы отсортирована в порядке возрастания значений,
  - 0 – если первая строка таблицы не отсортирована.

## Сортировка записей базы данных

*Сортировка записей* — упорядочение записей в базе данных по значению какого-либо одного поля или нескольких полей.

### Сортировка записей базы данных по значению одного поля

Если базу данных необходимо отсортировать по значению какого-либо одного поля, то следует установить табличный курсор в одну из ячеек данного поля и далее выбрать на вкладке *Данные* в группе *Сортировка и фильтр* одну из кнопок упорядочивания записей с нужным направлением сортировки записей:

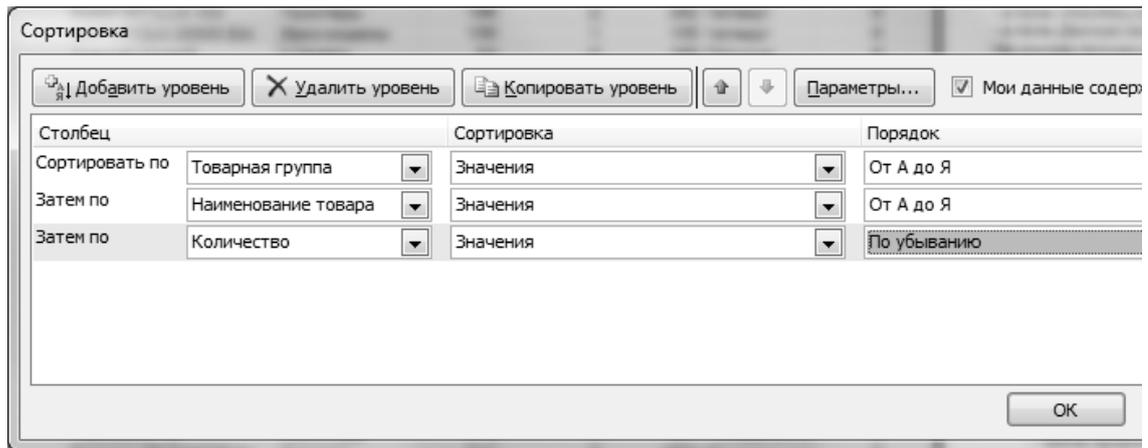
- кнопка  *Сортировка по возрастанию*;
- кнопка  *Сортировка по убыванию*.

В результате табличный процессор *Microsoft Excel* упорядочит записи базы данных по значению указанного поля и выбранному направлению – *по возрастанию* или *по убыванию*.

### Сортировка записей базы данных по значениям нескольких полей

Если базу данных необходимо отсортировать по значениям нескольких полей, то для этого:

- Установить табличный курсор в любую ячейку базы данных или выделить базу данных, используя созданное имя базы данных или комбинации клавиш для выделения ячеек таблицы, описанные выше.
- Выбрать вкладку *Данные* → группу *Сортировка и фильтр* → кнопку *Сортировка*. В результате загрузится окно диалога *Сортировка* (см. Рис.5.4), в котором в раскрывающемся списке *Сортировать по* выбрать то имя поля базы данных, по значению которого в первую очередь осуществляется сортировка записей в базе данных, далее выбрать направление сортировки записей базы данных по возрастанию *От А до Я* или по убыванию *от Я до А*.
- Для добавления второго и далее ключей сортировки следует выбрать кнопку  , и выполнить аналогичные операции, описанные для первого уровня сортировки записей базы данных.



**Рис. 5.4** Окно диалога *Сортировка*

- Кнопка **Параметры...** позволяет установить дополнительные параметры сортировки записей. Например, можно установить сортировку записей списка или по строкам или по столбцам.

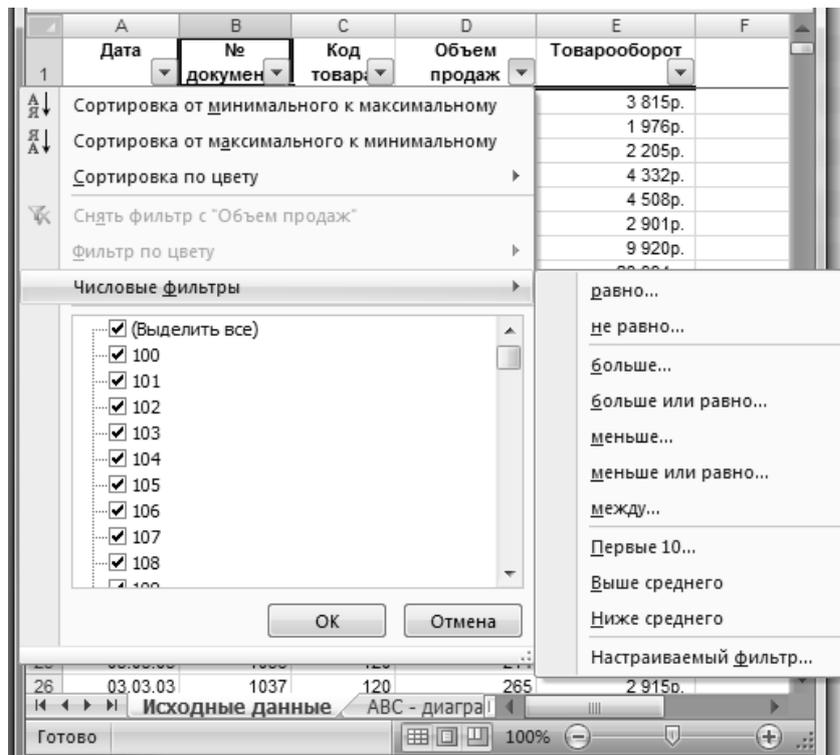
## Фильтрация записей в базе данных

### Фильтр

#### Установка режима фильтрации записей

Режим фильтрации записей *Фильтр* – отбор из базы данных записей, которые удовлетворяют некоторому заданному критерию.

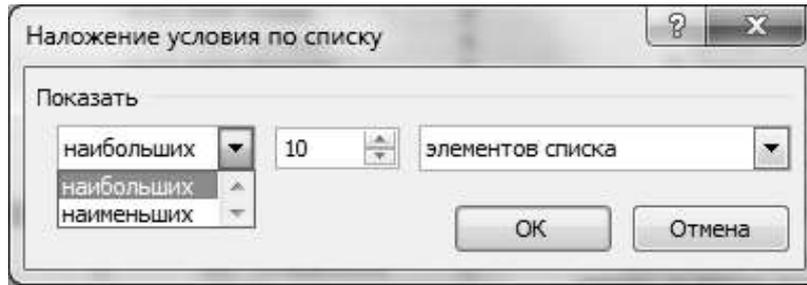
Для включения режима фильтрации записей следует установить табличный курсор в любую ячейку базы данных или выделить строку с заголовками полей базы данных. Далее выбрать вкладку *Данные* → группу *Сортировка и Фильтр* → кнопку *Фильтр*. После чего в строке с заголовками полей базы данных около каждого наименования поля появится кнопка с изображением стрелки ▼ (см. Рис.5.5). При выборе этой кнопки раскрывается список команд, позволяющий осуществлять сортировку и отбор записей по определенным критериям.



**Рис. 5.5** Режим *Фильтр*

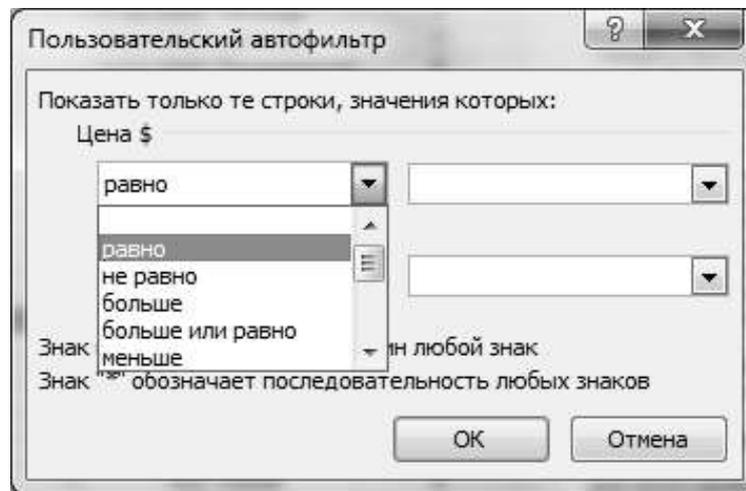
Возможные критерии фильтрации записей базы данных:

- выбор записей, соответствующих конкретному значению поля (флажок  рядом с конкретным значением поля в списке значений);
- выбор первых нескольких наибольших или наименьших по значению записей базы данных *Первые 10...*. В результате загрузится окно диалога *Наложение условия по списку* (см. Рис.5.6). Данный режим фильтрации записей работает только с числовыми полями.



**Рис. 5.6** Окно диалога *Наложение условия по списку*

- выбор записей, соответствующих заданному условию *Настраиваемый фильтр...*. В результате загрузится окно диалога *Пользовательский автофильтр* (см. Рис.5.7).



**Рис. 5.7** Окно диалога *Пользовательский автофильтр*

В раскрывшемся окне диалога в группе *Показать только те строки, значения которых:* слева в раскрывающемся списке критериев фильтрации записей необходимо выбрать нужный критерий отбора записей (критерии фильтрации можно задавать как для числовых, так и для текстовых полей):

- |                    |                    |                       |
|--------------------|--------------------|-----------------------|
| –равно;            | –меньше;           | –заканчивается на;    |
| –не равно;         | –меньше или равно; | –не заканчивается на; |
| –больше;           | –начинается с;     | –содержит;            |
| –больше или равно; | –не начинается с;  | –не содержит.         |

Справа в раскрывающемся списке выбрать из списка конкретное значение или ввести с клавиатуры значение, соответствующее выбранному критерию фильтрации записей для текущего поля.

В режиме фильтрации записей *Настраиваемый фильтр...* для текущего поля можно задать не один критерий фильтрации записей, а максимум два, заполнив

аналогичным образом расположенные ниже поле выбора критерия фильтрации записей и поля ввода значения, соответствующего критерию фильтрации записей. Переключатель  $\odot$  *И* в данном окне диалога выбирается если требуется, чтобы значение текущего поля удовлетворяло обоим указанным критериям фильтрации одновременно. И переключатель  $\odot$  *ИЛИ* выбирается, если требуется, чтобы значение текущего поля удовлетворяло, хотя бы одному из указанных критериев фильтрации записей.

### Снятие режима фильтрации записей

Для отображения всех записей базы данных следует выбрать:

- или вкладку *Данные* → группу *Сортировка и фильтр* → кнопку *Очистить*. В этом случае снимаются фильтры со всех полей базы данных.
- или вкладку *Данные* → группу *Сортировка и фильтр* → кнопку *Фильтр*. В этом случае на экране отображаются все записи базы данных, но при этом снимается режим *Фильтр* с названий полей базы данных.

Снятие режима фильтрации с отдельных полей базы данных можно выполнить, поработав с каждым полем индивидуально:

- или команда *Снять фильтр с Название текущего поля*, которая находится в списке команд фильтрации, которые доступны для каждого поля в строке заголовков полей базы данных;
- или команда *Снять фильтр с Название текущего поля*, которая находится в списке команд контекстного меню к текущему полю базы данных.

### Расширенный фильтр

Режим фильтрации записей *Расширенный фильтр* – отбор из базы данных записей, которые удовлетворяют некоторому набору заданных критериев. Данный режим фильтрации записей позволяет задавать сложные критерии фильтрации записей базы данных в виде диапазона ячеек, в которых записываются критерии фильтрации, который называется *диапазоном условий отбора записей*.

В критерии фильтрации расширенного фильтра может входить:

- набор критериев фильтрации, состоящий из критериев, заданных отдельно для каждого поля. Критерии фильтрации, входящие в набор могут выполняться либо все одновременно, либо хотя бы один из указанных;
- набор критериев фильтрации, состоящий из несколько критериев, заданных для одного поля. Критерии фильтрации, входящие в набор могут выполняться либо все одновременно, либо хотя бы один из указанных;

– набор критериев фильтрации, состоящий из критериев фильтрации, заданных как результат выполнения формулы.

В режиме *Расширенного фильтра* на рабочем листе необходимо выделить ячейки, в которых будут задаваться критерии фильтрации записей базы данных для каждого отдельного поля. Обычно для этой цели выделяют ячейки таблицы, находящиеся над базой данных, то есть над строкой заголовков полей базы данных или для этого выделяются ячейки таблицы другого рабочего листа. В выделенные для этой цели ячейки копируются названия полей базы данных, где под заголовками полей в ячейках таблицы задаются критерии фильтрации записей базы данных.

Если база данных и диапазон условий отбора записей находятся на одном рабочем листе, то между этими двумя таблицами должна находиться как минимум одна пустая строка, или один пустой столбец (зависит от расположения таблиц на рабочем листе).

Критерии фильтрации записей базы данных, записанные в одной строке каждый критерий под своим названием поля, должны выполняться *одновременно*. Если сравнивать с режимом *Фильтр* - это переключатель  И в режиме *Настраиваемый фильтр*....

Если критерии фильтрации записей базы данных указаны в *разных строках* таблицы - каждый критерий под своим названием поля, то должны выполняться *или* одновременно все критерии, записанные в одной строке, *или* одновременно все критерии, записанные в другой строке. Если сравнивать с режимом *Фильтр* - это переключатель  ИЛИ в режиме *Настраиваемый фильтр*....

### Одновременное выполнение критериев фильтрации

Если для отдельных полей базы данных необходимо задать по одному критерию фильтрации, и указанные критерии должны выполняться одновременно, то следует задать эти критерии в одной строке диапазона условий отбора записей - каждый критерий под своим названием поля:

Поле_1	Поле_2	Поле_3	Поле_4
	Критерий_1		Критерий_2

*Результат:* Заданные Критерий\_1 для Поля\_2 **И** Критерий\_2 для Поля\_4 должны выполняться одновременно.

**Выполнение хотя бы одного из критериев фильтрации,  
заданных для одного поля**

Если для одного поля необходимо задать два и более критериев фильтрации, которые должны выполняться не все одновременно, а хотя бы один из перечисленных, то следует задать эти критерии в ячейки разных строк диапазона условий отбора записей непосредственно друг под другом под названием конкретного поля:

Поле_1	Поле_2	Поле_3	Поле_4
	Критерий_1		
	Критерий_2		
	Критерий_3		

*Результат:* Должен быть выполнен хотя бы один из заданных критериев для Поля\_2 – **ИЛИ** Критерий\_1, **ИЛИ** Критерий\_2 **ИЛИ** Критерий\_3.

**Одновременное выполнение нескольких критериев фильтрации  
для одного поля**

Если для одного поля необходимо задать два и более критериев фильтрации записей, которые должны выполняться одновременно, то следует в диапазоне условий отбора записей в строке заголовков полей добавить нужное количество ячеек с заголовками данного поля (то есть продублировать название нужного поля), под которыми задать критерии фильтрации в одной строке:

Поле_1	Поле_2	Поле_3	Поле_2	Поле_2
	Критерий_1		Критерий_2	Критерий_3

*Результат:* Заданные для Поля\_2 **И** Критерий\_1, **И** Критерий\_2, **И** Критерий\_3 должны выполняться одновременно.

**Выполнение хотя бы одного из критериев фильтрации  
для разных полей**

Если для разных полей базы данных необходимо задать критерии фильтрации, которые должны выполняться не одновременно, а хотя бы один из указанных, то следует задать критерии фильтрации записей в разные строки диапазона условий отбора записей - каждый критерий под своим названием полем соответственно.

Поле_1	Поле_2	Поле_3	Поле_4
	Критерий_1		
			Критерий_2

*Результат:* Должен быть выполнен хотя бы один из заданных критериев **ИЛИ** Критерий\_1 для Поля\_2, **ИЛИ** Критерий\_2 для Поля\_4.

### Задание диапазона условий отбора записей:

#### запись критериев фильтрации

Критерии фильтрации записей, задаваемые в ячейках, записывают в виде формулы, то есть выражение должно начинаться со знака равенства, а сам критерий фильтрации записывается в виде текстовой строки в кавычках:

= "критерий\_фильтрации "

Для записи операций сравнения используются следующие символы:

=	Равно	>	Больше
<>	Не равно	<	Меньше
		>=	Больше равно
		<=	Меньше равно

Например:

- ">=200" – все записи базы данных, где значения текущего поля больше или равны 200;
- "5000" – все записи базы данных, где значения текущего поля равны 5000;
- "<>50" – все записи базы данных, где значения текущего поля не равны 50;
- и т.д.

При сравнении текстовых значений применяются следующие символы:

символ *	– любая последовательность символов
символ ?	– любой единичный символ

Например:

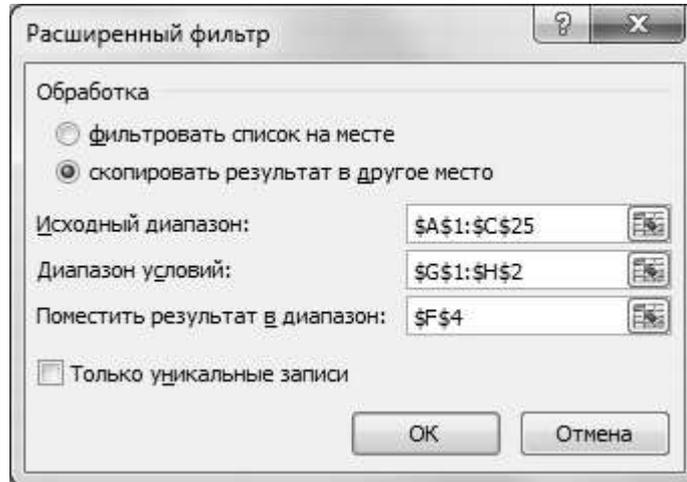
- "К\*" – все записи базы данных, где значения текущего поля начинаются с буквы "К";
- "Марка1?" – все записи базы данных, где значения текущего поля, начинаются с символов "Марка1", и содержат далее любой единичный символ. Например это значения - Марка11, Марка13, Марка17, и др.

### Режим фильтрации записей: *Расширенный фильтр*

- Установить табличный курсор в любую ячейку базы данных.
- Выбрать вкладку *Данные* → группа *Сортировка и фильтр* → кнопка *Дополни-*

тельно. В результате загрузится окно диалога *Расширенный фильтр* (см. Рис.5.8), в котором следует:

- в группе переключателей *Обработка* установить один из переключателей  *фильтровать список на месте* или  *скопировать результат в другое место*;



**Рис. 5.8** Окно диалога *Расширенный фильтр*

- в окне ввода *Исходный диапазон:* указать ссылку на диапазон ячеек, в которых находится база;

Если перед вызовом окна диалога *Расширенный фильтр* табличный курсор находился в любой ячейке исходной базы данных или база данных была предварительно выделена, то в окне ввода *Исходный диапазон:* автоматически будет указан диапазон ячеек, в котором находится база данных. В противном случае, для указания базы данных, в которой выполняется фильтрация записей в окне ввода *Исходный диапазон:* следует указать диапазон ячеек, в которых находится база данных одним из следующих способов:

- или выделить диапазон ячеек, в котором располагается база данных, с помощью клавиатуры или с помощью мыши (способы выделения диапазонов ячеек таблицы см. выше);
- или вызвать созданное пользовательское имя базы данных с помощью вкладки *Формулы* → группы *Определенные имена* → кнопки с раскрывающимся списком *Использовать в формуле* → и далее выбрать нужное имя из списка имен книги;
- или нажать функциональную клавишу *F3*.
- в окне *Диапазон условий:* ввести ссылки на диапазон ячеек, в которых описан диапазон условий отбора записей, включая и названия полей и сами ячейки, в которых записаны критерии фильтрации записей;

- Если в группе переключателей *Обработка* был выбран переключатель  *фильтровать список на месте*, то табличный процессор *Microsoft Excel* отобразит на экране только те записи базы данных, которые будут удовлетворять заданным критериям фильтрации записей.
- Если в группе переключателей *Обработка* установить переключатель  *скопировать результат в другое место*, то станет активным окно ввода *Поместить результат в диапазон*, в котором следует ввести ссылку на ячейку таблицы - верхнюю левую ячейку области вставки, с которой должны начинаться записи отфильтрованной базы данных.

В результате табличный процессор *Microsoft Excel* в указанную область вставит только те записи базы данных, которые будут удовлетворять заданным критериям фильтрации записей.

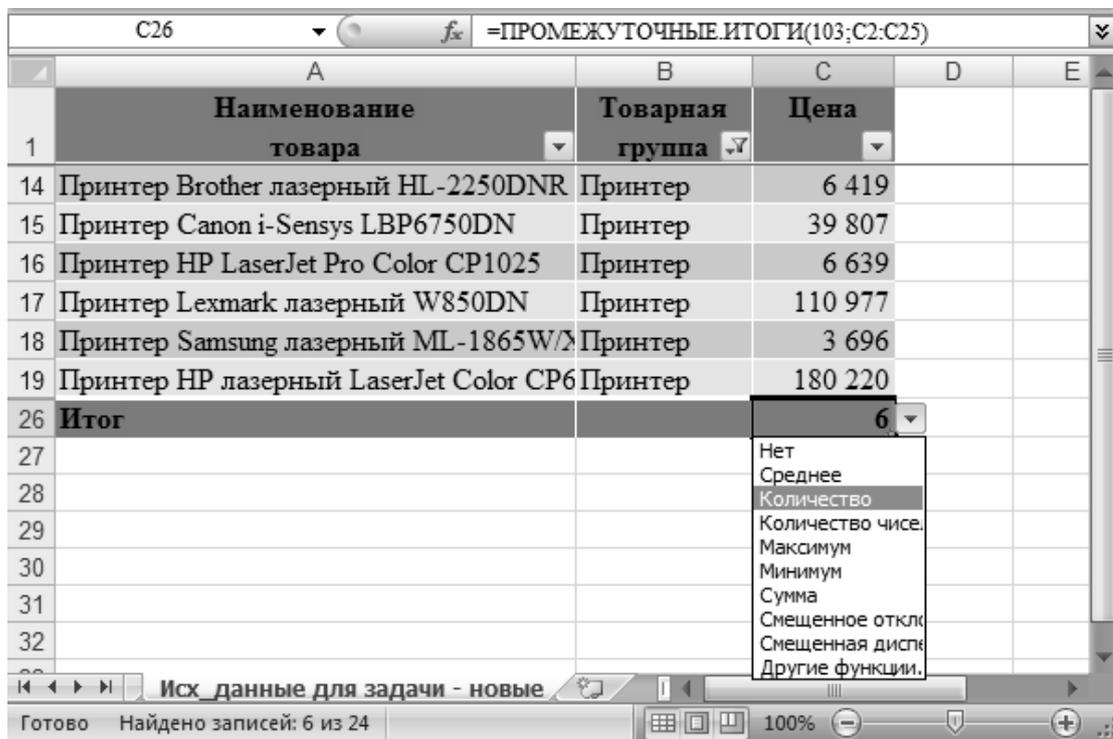
### Снятие режима фильтрации записей

Для отображения всех записей базы данных, если был выбран режим *фильтровать на месте*, следует выбрать вкладку *Данные* → группу *Сортировка и фильтр* → кнопка *Очистить*.

## Промежуточные итоги

### Добавление итогов в базу данных

В базу данных можно поместить строку итогов с помощью команды контекстного меню *Таблица* → команда  $\Sigma$  *Строка итогов*. В результате снизу под базой данных вставится строка, в которой будут вставлены итоги для каждого поля. Вычислительную операцию для подведения итогов можно выбрать в раскрывающемся списке к вставленному итогу для каждого поля – *Среднее, Количество, Количество чисел, Максимум, Минимум, Сумма, Смещенное отклонение, Смещенная дисперсия, Другие функции...* (см. Рис.5.9).



1	Наименование товара	Товарная группа	Цена
14	Принтер Brother лазерный HL-2250DNR	Принтер	6 419
15	Принтер Canon i-Sensys LBP6750DN	Принтер	39 807
16	Принтер HP LaserJet Pro Color CP1025	Принтер	6 639
17	Принтер Lexmark лазерный W850DN	Принтер	110 977
18	Принтер Samsung лазерный ML-1865W/D	Принтер	3 696
19	Принтер HP лазерный LaserJet Color CP6	Принтер	180 220
26	<b>Итого</b>		6

Рис. 5.9 Строка итогов

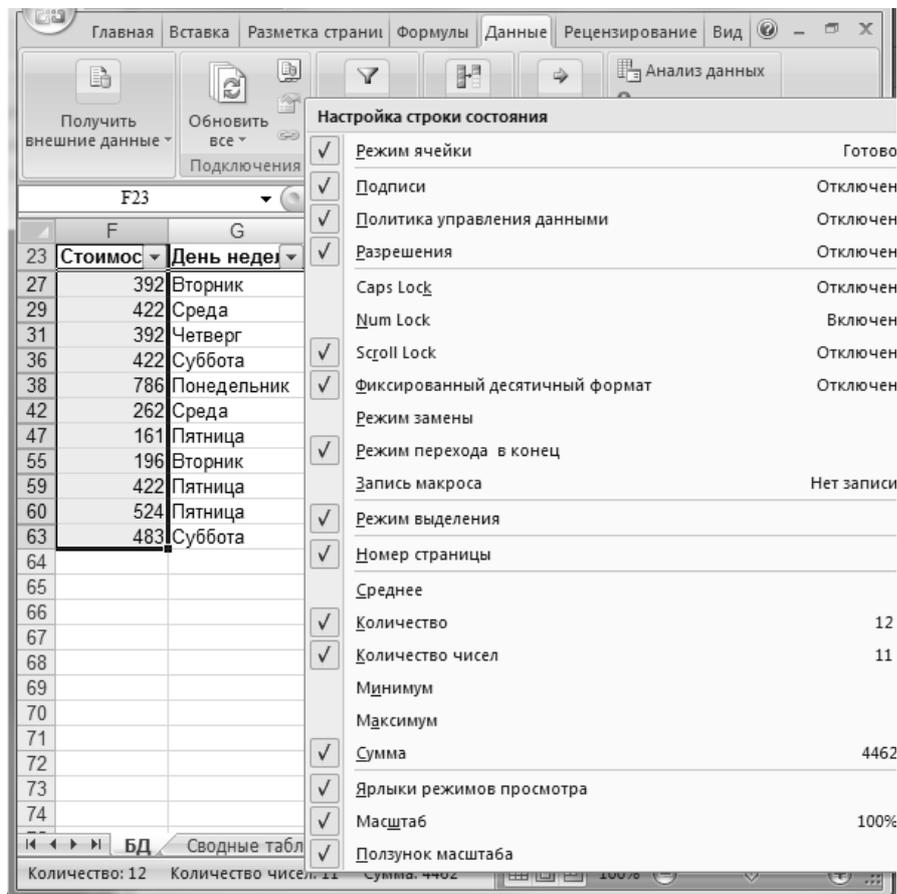
### Просмотр итогов в базе данных с помощью Строки состояния

- Выделить поле базы данных, для которого нужно подвести итоги.
- Вызвать контекстное меню в *Строке состояния* и в раскрывшемся списке операций следует выбрать нужную вычислительную операцию для просмотра итогов выделенного поля базы данных - *Среднее, Количество, Количество чисел, Минимум, Максимум, Сумма* (см. Рис.5.10).

В результате табличный процессор *Microsoft Excel* в *Строке состояния* покажет результаты выбранной операции подведения итогов.

Данный режим просмотра итогов удобно применять в режиме фильтрации записей базы данных, когда на рабочем листе отбираются нужные записи по какому-либо

критерию. Далее выделяются значения нужного поля и просматриваются промежуточные итоги этого поля в *Строке состояния*.



**Рис. 5.10** Подведение итогов в *Строке состояния*

### Подведение итогов с помощью *Мастера функций*.

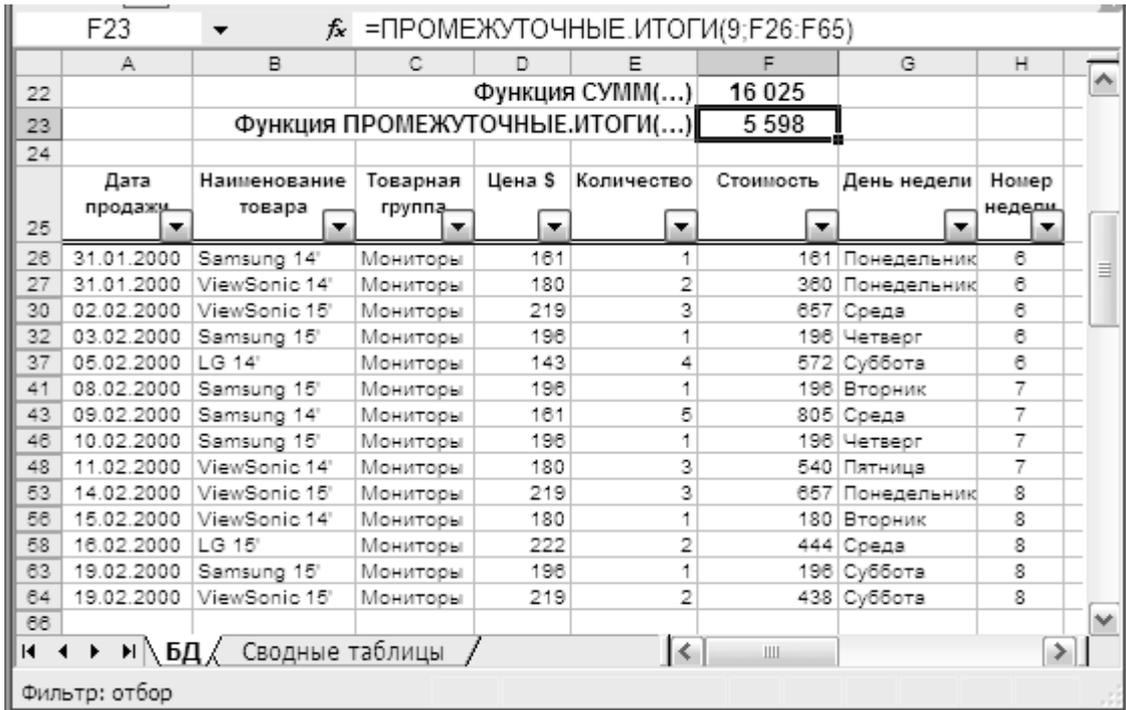
#### Функция *ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ.ИТОГИ(...)*

Сверху над записями базы данных можно вставить несколько пустых строк, в которых можно подвести итоги в форме вычислений по значениям полей базы данных. Для этого можно использовать функцию *ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ.ИТОГИ(...)* из категории *Математические*, за которой закреплены следующие функции:

Номер функции	Функция	Действие
1	$CP3HAЧ(...)$ - $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$	Возвращает среднее (арифметическое) своих аргументов.
2	$СЧЁТ(...)$	Подсчитывает количество чисел в списке аргументов.
3	$СЧЁТЗ(...)$	Подсчитывает количество непустых значений в списке аргументов.

Номер функции	Функция	Действие
4	<i>МАКС(...)</i> - $\max(x_1, x_2, \dots, x_n)$	Возвращает наибольшее значение из набора значений.
5	<i>МИН(...)</i> - $\min(x_1, x_2, \dots, x_n)$	Возвращает наименьшее значение в списке аргументов.
6	<i>ПРОИЗВЕД(...)</i> - $\prod_{i=1}^n x_i$	Перемножает числа, заданные в качестве аргументов и возвращает их произведение.
7	<i>СТАНДОТКЛОН(...)</i> - $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$	Оценивает стандартное отклонение по выборке. Стандартное отклонение — это мера того, насколько широко разбросаны точки данных относительно их среднего.
8	<i>СТАНДОТКЛОНП(...)</i> - $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$	Вычисляет стандартное отклонение по генеральной совокупности. Стандартное отклонение — это мера того, насколько широко разбросаны точки данных относительно их среднего.
9	<i>СУММ(...)</i> - $\sum_{i=1}^n x_i$	Суммирует все числа в интервале ячеек.
10	<i>ДИСП(...)</i> - $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$	Оценивает дисперсию по выборке.
11	<i>ДИСПР(...)</i> - $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$	Вычисляет дисперсию для генеральной совокупности.

В качестве аргументов у функции *ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ.ИТОГИ(...)* следует указать выбранную операцию для подведения итогов и диапазон ячеек, в котором располагаются все значения текущего поля - с первой записи по последнюю, для которого подводятся итоги. Значение функции, зависят от количества записей, отображаемых на экране в режиме фильтрации записей (см. Рис.5.11):



Дата продажи	Наименование товара	Товарная группа	Цена \$	Количество	Стоимость	День недели	Номер недели
31.01.2000	Samsung 14"	Мониторы	161	1	161	Понедельник	6
31.01.2000	ViewSonic 14"	Мониторы	180	2	360	Понедельник	6
02.02.2000	ViewSonic 15"	Мониторы	219	3	657	Среда	6
03.02.2000	Samsung 15"	Мониторы	198	1	198	Четверг	6
05.02.2000	LG 14"	Мониторы	143	4	572	Суббота	6
08.02.2000	Samsung 15"	Мониторы	198	1	198	Вторник	7
09.02.2000	Samsung 14"	Мониторы	161	5	805	Среда	7
10.02.2000	Samsung 15"	Мониторы	198	1	198	Четверг	7
11.02.2000	ViewSonic 14"	Мониторы	180	3	540	Пятница	7
14.02.2000	ViewSonic 15"	Мониторы	219	3	657	Понедельник	8
15.02.2000	ViewSonic 14"	Мониторы	180	1	180	Вторник	8
16.02.2000	LG 15"	Мониторы	222	2	444	Среда	8
19.02.2000	Samsung 15"	Мониторы	198	1	198	Суббота	8
19.02.2000	ViewSonic 15"	Мониторы	219	2	438	Суббота	8

**Рис. 5.11** Значения сумм, полученные с помощью функций *СУММ(...)* и *ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ.ИТОГИ(...)*

С помощью функций табличного процессора по обработке числовых последовательностей можно получать результаты для всей базы данных в целом - по всем записям. То есть, если применяется фильтрация записей в базе данных, то формулы, содержащие ссылки на записи базы данных не изменяют свои значения. А функция *ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ.ИТОГИ(...)* позволяет получать текущие результаты для отобранных записей базы данных (см. Рис.5.11).

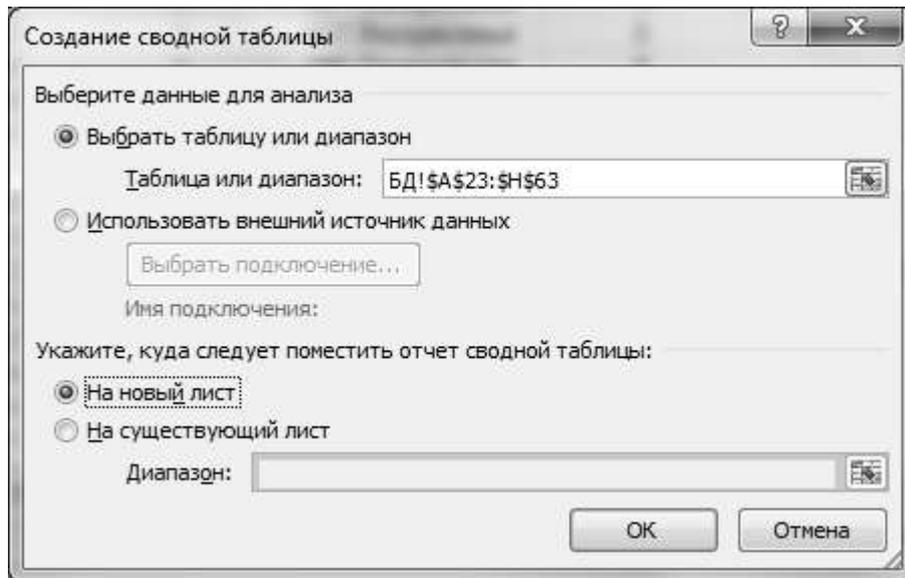
## §6. Оперативная аналитическая обработка данных

### *Сводные таблицы и диаграммы*

*Сводная таблица и сводная диаграмма* — настраиваемые таблица и диаграмма для организации полей базы данных в новых сочетаниях.

#### **Выбор источника данных и задание параметров сводного отчета**

При построении сводной таблицы или сводной диаграммы следует установить табличный курсор в любую ячейку базы данных и выбрать вкладку *Вставка* → группу *Таблицы* → кнопку с раскрывающимся списком *Сводная таблица* и далее выбрать вариант *Сводная таблица* либо *Сводная диаграмма*, если создается отчет в виде либо сводной таблицы, либо сводной диаграммы соответственно. В результате загрузится окно диалога *Создание сводной таблицы* (см. Рис.6.1).



**Рис. 6.1** Окно диалога *Создание сводной таблицы*

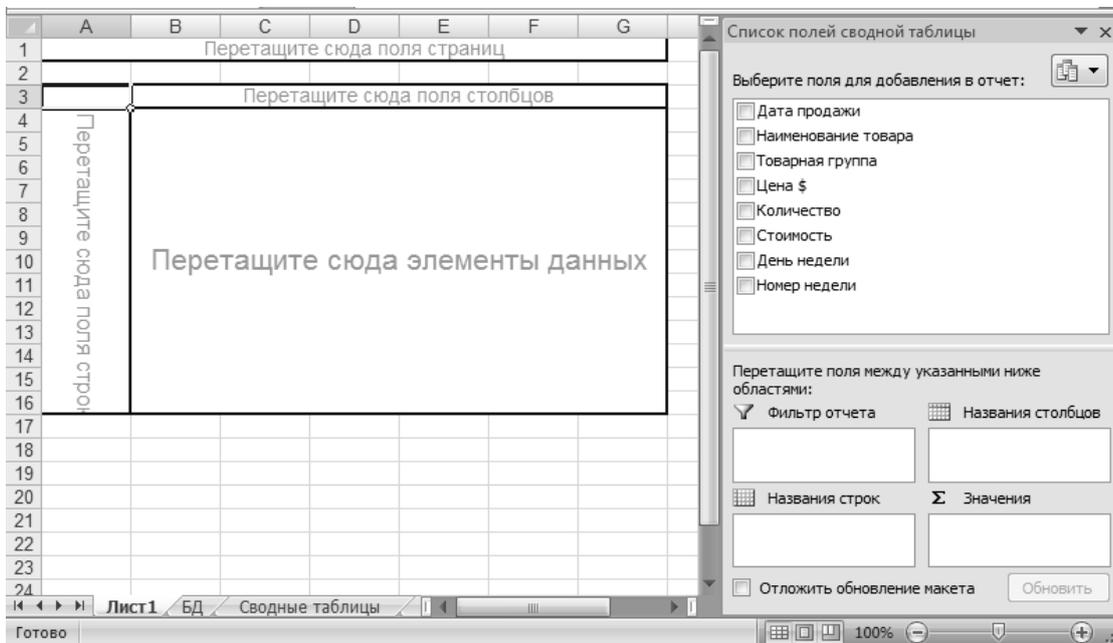
В раскрывшемся окне диалога следует выбрать источник данных и местоположение создаваемого отчета. Для чего в группе переключателей *Выберите данные для анализа* установить переключатель  *Выбрать таблицу или диапазон*, если исходная база данных находится на рабочем листе в книге табличного процессора *Microsoft Excel* или переключатель  *Использовать внешний источник данных*, если исходная база данных находится во внешнем источнике и далее следует выбрать расположение внешнего источника. Далее в группе переключателей *Укажите, куда следует поместить отчет сводной таблицы:* выбрать или переключатель  *на новый лист* или переключатель  *на существующий лист* и далее в окне ввода

*Диапазон:* следует указать ссылку на ячейку, начиная с которой будет вставлен отчет сводной таблицы.

Если перед вызовом окна диалога *Создание сводной таблицы*, табличный курсор находился в любой ячейке базы данных или она была предварительно выделена, то в окне ввода *Таблица или диапазон:* автоматически будет указан диапазон ячеек, в котором находится база данных. В противном случае, для указания ссылки на базу данных, на основе которой строится сводный отчет, в окне ввода *Таблица или диапазон:* следует указать диапазон ячеек, в которых находится база данных одним из следующих способов:

- или выделить диапазон ячеек, в котором располагается база данных, с помощью клавиатуры или с помощью мыши (способы выделения диапазонов ячеек таблицы см. выше);
- или вызвать созданное пользовательское имя базы данных с помощью вкладки *Формулы* → группы *Определенные имена* → кнопки с раскрывающимся списком *Использовать в формуле* → выбрать нужное имя из списка имен книги;
- или нажать функциональную клавишу *F3*.

В результате табличный процессор *Microsoft Excel* вставит в книгу новый рабочий лист, на котором будет пустой макет сводной таблицы (см. Рис.6.2).



**Рис. 6.2** Окно диалога *Создание сводной таблицы*

### Создание макета сводной таблицы

Для создания макета сводной таблицы следует определить структуру сводной таблицы, для чего необходимо перетащить кнопки с названиями полей базы данных,

расположенные справа в раскрывшемся окне диалога *Список полей сводной таблицы*, в соответствующие области макета сводной таблицы:

*Перетащите сюда поля страниц*,

*Перетащите сюда поля строк*,

*Перетащите сюда поля столбцов*,

*Перетащите сюда элементы данных*.

Перечисленные области макета сводной таблицы расположены также и внизу в окне диалога *Список полей сводной таблицы* в виде отдельных окон и называются соответственно *Фильтр отчета*, *Названия строк*, *Названия столбцов*,  $\Sigma$  *Значения*. В связи с этим создание макета сводной таблицы можно выполнить одним из следующих способов:

- перетащить поля базы данных в нужные области макета непосредственно на макет сводной таблицы, находящийся на рабочем листе;
- перетащить поля базы данных в области макета, расположенные внизу в окне диалога *Список полей сводной таблицы*;
- проставить флажки напротив нужных полей базы данных в списке полей *Выберите поля для добавления в отчет*: в окне диалога *Список полей сводной таблицы*. Ограничение этого способа является то, что при создании макета задействованы только области *Названия строк* и  $\Sigma$  *Значения*.

### **Области макета сводной таблицы**

- поля, перемещенные в область макета сводной таблицы *Фильтр отчета*, образуют страницу сводной таблицы;
- поля, перемещенные в область макета сводной таблицы *Названия строк*, образуют строки сводной таблицы;
- поля, перемещенные в область макета сводной таблицы *Названия столбцов*, образуют столбцы сводной таблицы;
- поля, перемещенные в область макета сводной таблицы  $\Sigma$  *Значения*, будут просуммированы функцией *СУММ(...)*, которая применяется по умолчанию. В этой области макета сводной таблицы можно выбрать и другие операции по обработке полей сводной таблицы и диаграммы.

### **Установка параметров полей сводной таблицы**

Для полей, находящихся в области макета сводной таблицы  $\Sigma$  *Значения*, можно выбрать другие вычислительные операции для подведения итогов в полях сводной

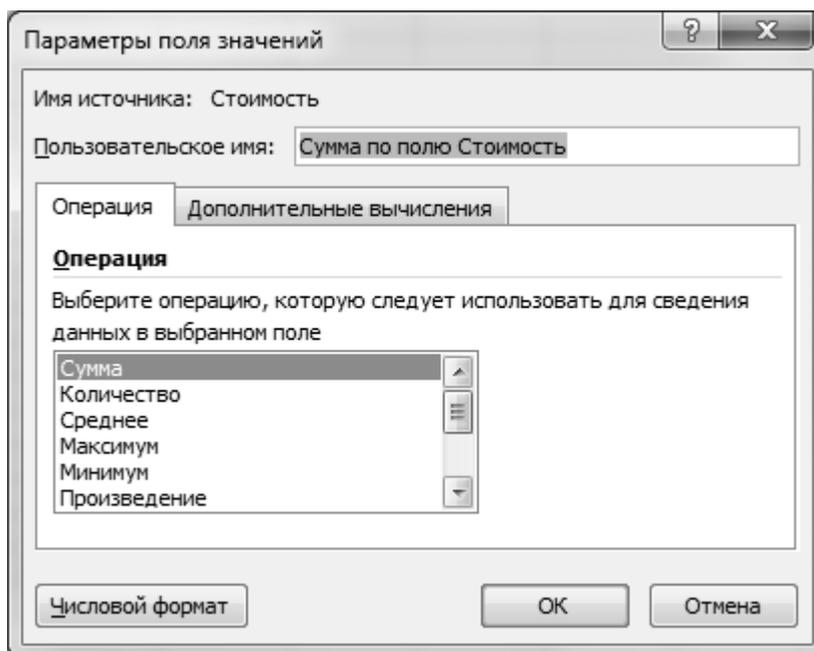
таблицы или сводной диаграммы. Для этого необходимо вызвать параметры поля сводной таблицы одним из следующих способов:

- или вкладка *Параметры* → группа *Активное поле* → кнопка *Параметры поля*;
- или контекстное меню к полю сводной таблицы, в котором выбрать команду *Параметры поля...*;
- или в окне  $\Sigma$  *Значения* у элемента окна *Сумма по полю...* раскрыть список команд, в котором выбрать команду *Параметры полей значений....*

В результате загрузится окно диалога *Параметры поля значений* (см. Рис.6.3), в котором:

- на вкладке *Операция* в списке с прокруткой можно выбрать нужную вычислительную операцию для подведения итогов по текущему полю базы данных:

<b>Операция</b>	<b>Описание</b>
<i>Сумма</i>	Сумма чисел. Эта операция используется по умолчанию для подведения итогов по числовым полям.
<i>Количество</i>	Число значений. Функция сложения <i>Количество</i> работает так же, как функция книги <i>СЧЕТЗ(...)</i> . <i>Количество</i> — это функция по умолчанию для нечисловых данных.
<i>Среднее</i>	Среднее арифметическое значение.
<i>Максимум</i>	Наибольшее значение.
<i>Минимум</i>	Наименьшее значение.
<i>Произведение</i>	Произведение чисел.
<i>Количество чисел</i>	Число значений, которые представляют собой числа. Функция суммирования <i>Количество чисел</i> работает так же, как функция листа <i>СЧЁТ(...)</i> .
<i>Смещенное отклонение</i>	Оценка стандартного отклонения совокупности, где в качестве примера используется выборка данных из совокупности.
<i>Несмещенное отклонение</i>	Оценка стандартного отклонения совокупности, где в качестве примера используются все данные совокупности.
<i>Смещенная дисперсия</i>	Оценка дисперсии совокупности, где в качестве примера используется выборка данных из совокупности.
<i>Несмещенная дисперсия</i>	Оценка дисперсии совокупности, где в качестве примера используются все данные совокупности.



**Рис. 6.3** Окно диалога *Параметры поля значений*

– на вкладке *Дополнительные вычисления* в раскрывающемся списке можно выбрать нужную вычислительную операцию для подведения итогов по текущему полю базы данных:

<b>Операция</b>	<b>Описание</b>
<i>Отличие</i>	Отображение данных в виде разницы по отношению к значению <i>элемента</i> в <i>поле</i> .
<i>Доля</i>	Отображение данных в процентах к значению <i>элемента</i> в <i>поле</i> .
<i>Приведенное отличие</i>	Отображение данных в виде разницы в процентах по отношению к значению <i>элемента</i> в <i>поле</i> .
<i>С нарастающим итогом в поле</i>	Отображение данных в виде нарастающего итога для последовательных <i>элементов</i> в <i>поле</i> .
<i>Доля от суммы по строке</i>	Отображение данных в каждой строке или категории в процентах от итогового значения по этой строке или категории.
<i>Доля от суммы по столбцу</i>	Отображение всех данных в каждом столбце или ряду в процентах от итогового значения по этому столбцу или ряду.
<i>Доля от общей суммы</i>	Отображение данных в процентах от общей суммы всех данных или элементов данных в отчете.

Операция	Описание
<i>Индекс</i>	Вычисление значения следующим образом: $\frac{(\text{Значение в ячейке} \times \text{Общий итог})}{(\text{Итог строки} \times \text{Итог столбца})}$

– в окне ввода *Пользовательское имя*: можно изменить имя поля сводной таблицы. По умолчанию, оно формируется из имени поля исходной базы данных, по которому выполняется указанная вычислительная операция и имени самой вычислительной операции. Например:

*Сумма по полю Товарооборот,*

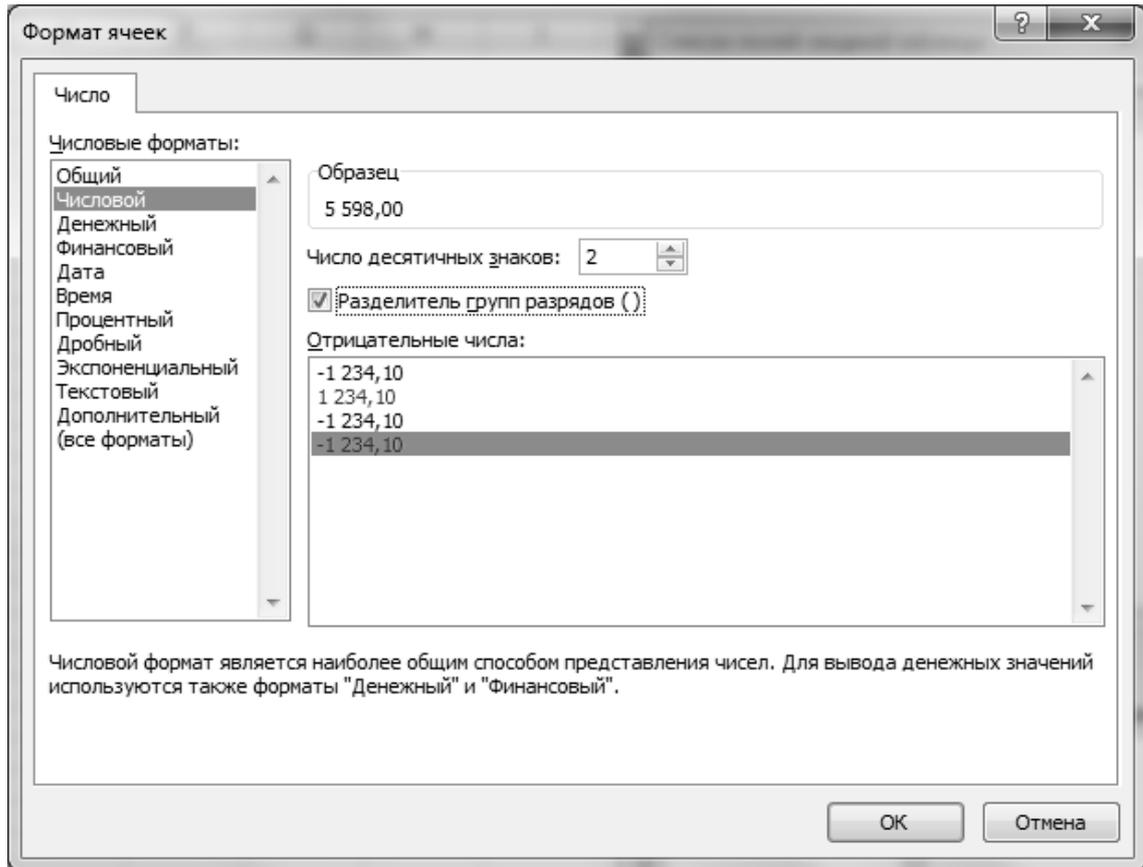
*Минимум по полю Объем продаж* и др.

Зачастую из полученного имени удаляют формальный текст типа *Сумма по полю*, *Минимум по полю* и др. и оставляют только название самого поля исходной базы данных, по которому подводится итог в сводной таблице. В результате чего имя поля сводной таблицы будет полностью совпадать с именем исходной базы данных. *Microsoft Excel* не допускает точного совпадения имен полей базы данных и имен полей сводной таблицы. Поэтому, в случае, если нужно, чтобы имена совпадали, то можно поступить следующим образом – добавить символ пробела до или после имени поля сводной таблицы. В результате получится чисто внешнее совпадение имен поля исходной базы данных и поля сводной таблицы.

– с помощью кнопки *Числовой формат* можно подобрать формат типов данных для полей сводной таблицы.

### Форматирование типов значений полей сводной таблицы

В режиме установки параметров полей сводной таблицы после выбора вычислительной операции и указания имени для поля сводной таблицы можно подобрать еще и числовой формат представления значений этого поля. Для чего в окне диалога *Параметры полей значений* (см. Рис.6.3) следует выбрать кнопку *Числовой формат...*. В результате загрузится окно диалога *Формат ячеек* (см. Рис.6.4), в котором можно задать числовой формат представления значений поля сводной таблицы – *Числовой*, *С разделителем*, *Денежный* и др.



**Рис. 6.4** Окно диалога *Формат ячеек*

Для табличных данных, имеющих отрицательные значения, удобно использовать возможность табличного процессора *Microsoft Excel* по представлению отрицательных чисел в формате, отличном от формата положительных чисел. Для выбора такого числового формата следует в списке *Числовые форматы*: выбрать формат *Числовой* и далее справа в списке *Отрицательные числа*: установить подходящий формат, в соответствии с которым отрицательные числа представляются в ячейках таблицы красным цветом со знаком или без, а положительные – черным цветом со знаком или без.

Для числовых данных можно задать числовой формат с разделителем, установив флажок  *Разделитель групп разрядов()* и подобрать нужное количество знаков после запятой с помощью счетчика *Число десятичных знаков*:. В этом же окне диалога *Формат ячеек* можно установить дополнительные параметры по форматированию числовых форматов значений в ячейках таблицы, задав маску формата для отображения значений. Для чего следует, после выбора какого-либо числового формата в списке *Числовые форматы*: выбрать вариант *(все форматы)*. В результате в этом же окне диалога появится окно ввода *Тип*: . в котором отобразится маска выбранного формата и в этом же окне ввода можно задать другую маску формата для отображения значений в ячейках таблицы.

Например, денежный формат с разделителем, с денежной единицей « р. », с 2-мя знаками после запятой будет выглядеть следующим образом: # ##0,00р.

Если в окне ввода *Тип:* к этой маске в конец добавить два символа - 2 точки с запятой « ;; », то в результате в сводной таблице данные, имеющие нулевые значения, на экран выводиться не будут, ячейка будет выглядеть пустой.

Можно установить специальный формат для отображения положительных, отрицательных и нулевых значений.

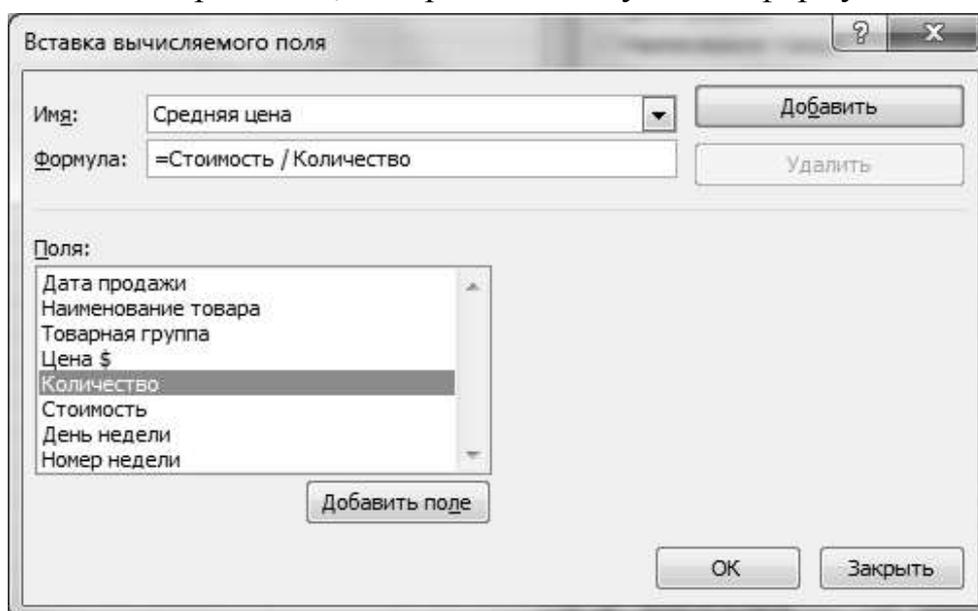
Например, чтобы положительные числа, денежного формата, с разделителем, с денежным знаком «р.», с двумя знаками после запятой выводились бы на экран синего цвета со знаком плюс, а отрицательные числа красного цвета со знаком минус, можно через режим (*все форматы*) в окне ввода *Тип:* задать следующую маску для отображения указанного числового формата:

[Синий] +# ## 0,00 р. ; [Красный] -# ## 0,00 р. ; ;

положительные значения
отрицательные значения
не печатаются нулевые значения

### Добавление вычисляемого поля в сводную таблицу

В сводную таблицу можно вставить вычисляемое поле. Для чего следует выбрать вкладку *Параметры* → группу *Сервис* → кнопку с раскрывающимся списком *Формулы* → команду *Вычисляемое поле...* В результате загрузится окно диалога *Вставка вычисляемого поля* (см. Рис.6.5), в котором в окне ввода *Имя:* следует ввести имя вычисляемого поля сводной таблицы, в окне ввода *Формула:* ввести формулу для вычисления поля сводной таблицы. Список полей *Поля:* и кнопка Добавить поле используются для выбора полей, которые используются в формуле.



**Рис. 6.5** Окно диалога *Вставка вычисляемого поля*

С помощью кнопок окна диалога  и  можно соответственно добавить новое вычисляемое поле в сводную таблицу или удалить имеющееся вычисляемое поле сводной таблицы.

### Задание параметров сводной таблицы

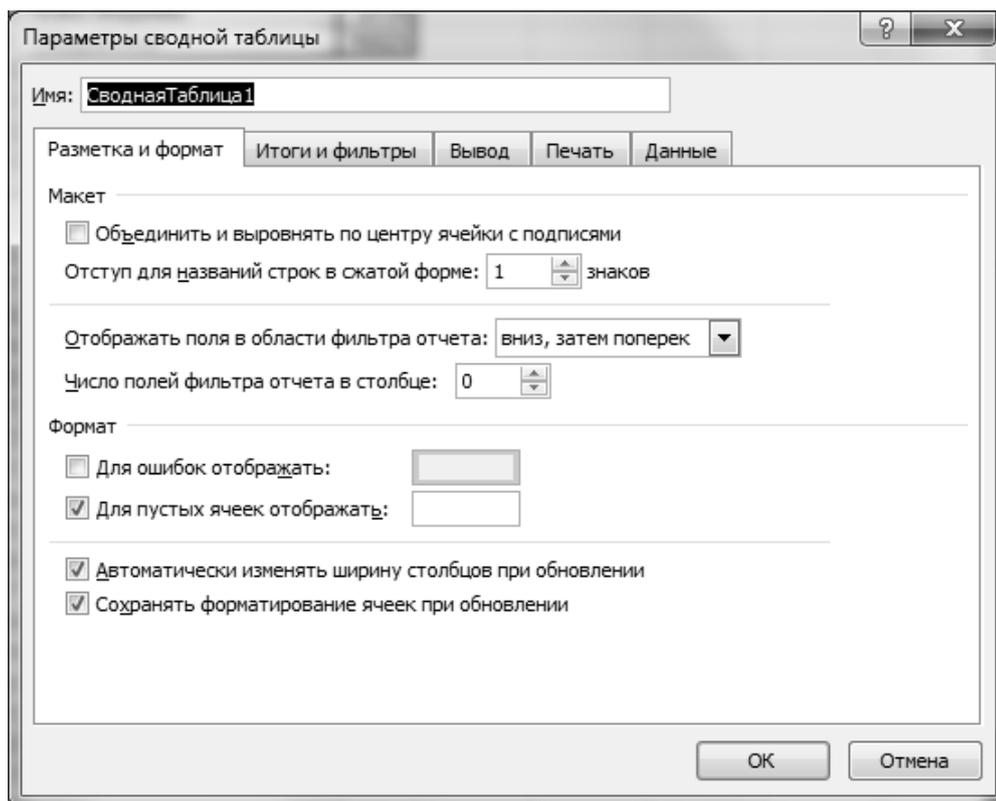
Для установки параметров сводной таблицы можно:

- или выбрать вкладку *Параметры* → группу *Сводная таблица* → кнопку с раскрывающимся списком *Параметры* → команду *Параметры*;
- или вызвать контекстное меню к сводной таблице, в котором выбрать команду *Параметры сводной таблицы*....

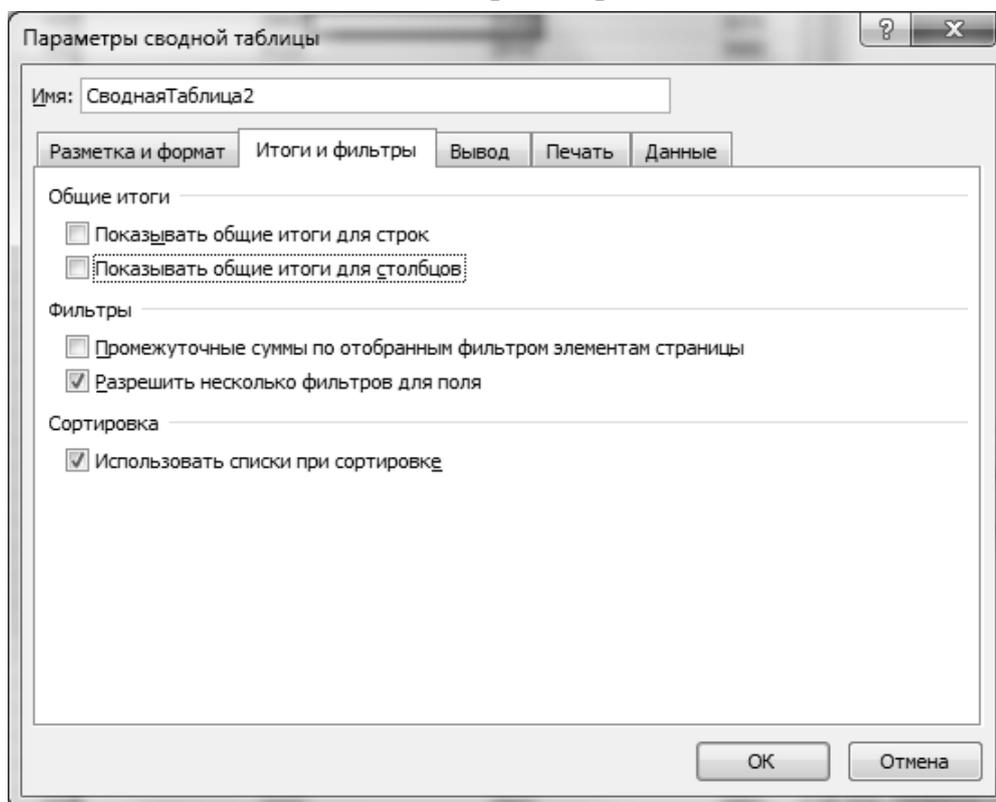
В результате загрузится окно диалога *Параметры сводной таблицы* (см. Рис.6.6), в котором можно установить дополнительные параметры форматирования сводной таблицы.

Если при вычислениях в сводной таблице возникают ошибки, например из-за отсутствия данных, то для того чтобы в сводной таблице эти ошибки не выводились на экран, на вкладке окна диалога *Разметка и формат* в группе *Формат* следует установить флажок  *Для ошибок отображать*:. В результате ячейки сводной таблицы, в которых получаются ошибки будут пустыми.

Если сводная таблица отформатирована пользователем, и необходимо сохранить этот формат после обновления данных в сводной таблице, то на вкладке окна диалога *Разметка и формат* в группе *Формат* следует снять флажок  *Автоматически изменять ширину столбцов при обновлении* и поставить флажок  *Сохранять форматирование ячеек при обновлении*.



**Рис. 6.6** Окно диалога *Параметры сводной таблицы*



**Рис. 6.7** Окно диалога *Параметры сводной таблицы*

Иногда из сводной таблицы необходимо исключить итоговые значения в строках и в столбцах. Для этих целей на вкладке *Итоги и фильтры* (см. Рис.6.7) в группе *Общие*

итоги снимают флажки у следующих параметров  *Показывать общие итоги для строк* и/или  *Показывать общие итоги для столбцов*.

### Сводные диаграммы

Диаграмма - графическое представление табличных данных. Сводные диаграммы связаны со сводной таблицей.

Для построения сводной диаграммы можно установить табличный курсор в любую ячейку сводной таблицы и далее выбрать вкладку *Вставка* → группу *Диаграммы* → выбрать тип диаграммы с помощью кнопок с раскрывающимся списком *Гистограмма, График, Круговая, Линейчатая* и др. Практически все типы диаграмм предлагают отражение табличных данных на плоскости, в объемном варианте и в пространстве. Есть возможность отображения табличных данных на диаграмме *с группировкой, с накоплением* и отразить в виде *нормированного типа диаграммы*. После построения сводной диаграммы для пользователя существует возможность изменения макета сводной диаграммы с помощью параметров окна диалога *Область фильтра сводной таблицы*, которая располагается справа в рабочей области пользователя. Все изменения, которые выполняются на сводной диаграмме, отражаются и в связанной с ней сводной таблице.

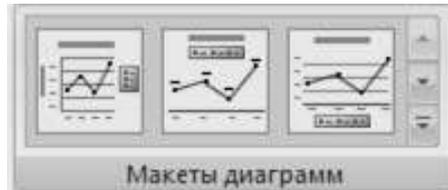
### Форматирование сводной диаграммы

Область построенной диаграммы состоит из множества объектов. Если перемещать указатель мыши по диаграмме, то к каждому объекту диаграммы всплывает подсказка с названием того объекта, на котором сейчас находится указатель мыши. Область диаграммы может состоять из следующих областей:

- *область диаграммы;*
- *область построения;*
- *ось значений;*
- *ось категорий;*
- *основные линии сеток;*
- *ряд ... точка ... значение;*
- *таблица данных;*
- *подпись данных;*
- *легенда;*
- *заголовок диаграммы;*
- *название оси значений;*
- *название оси категорий* и др.

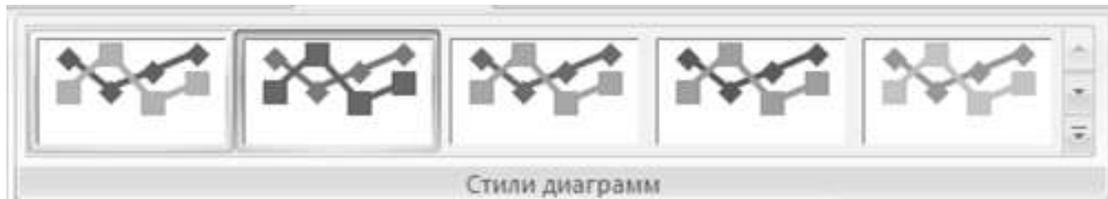
Если необходимо отформатировать или изменить какой-либо объект диаграммы, то его можно выделить, и далее выбрать соответствующую вкладку, группу и нужные кнопки в группе.

На вкладке *Конструктор* в группе *Макеты диаграмм* можно выбрать тип макета (см. Рис.6.8).



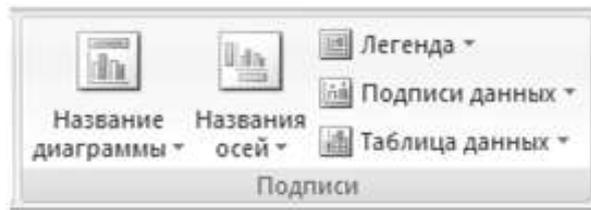
**Рис. 6.8** Вкладка *Конструктор* → группа *Макеты диаграмм*

На вкладке *Конструктор* в группе *Стили диаграмм* можно выбрать стиль оформления самого ряда данных (см. Рис.6.9).



**Рис. 6.9** Вкладка *Конструктор* → группа *Стили диаграмм*

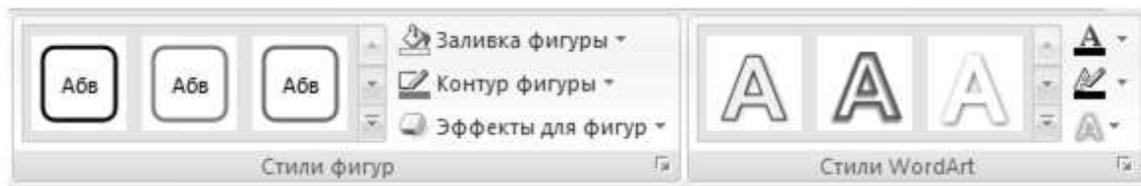
Для добавления на область диаграммы отдельных нужных элементов - *заголовков диаграммы, легенда, подписи данных, таблица данных, подписи осей* и др., можно использовать одноименные кнопки с раскрывающимся списком вариантов, находящиеся на вкладке *Макет* в группе *Подписи* (см. Рис.6.10).



**Рис. 6.10** Вкладка *Макет* → группа *Подписи*

Для форматирования отдельных элементов области диаграммы можно использовать нужные кнопки, находящиеся:

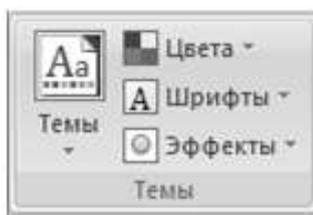
- на вкладке *Формат* в группе *Стили фигур* и в группе *Стили WordArt* (см. Рис.6.11);
- на вкладке *Главная* в группе *Шрифт* и в группе *Выравнивание* (см. Рис.6.12);
- на вкладке *Разметка страницы* в группе *Темы* (см. Рис.6.13).



**Рис. 6.11** Вкладка *Формат* → группа *Стили фигур* / *Стили WordArt*

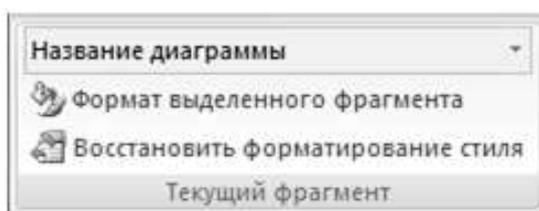


**Рис. 6.12** Вкладка *Формат* → группа *Шрифт* / *Выравнивание*



**Рис. 6.13** Вкладка *Разметка страницы* → группа *Темы*

– на вкладке *Формат* в группе *Текущий фрагмент* (Рис.6.14). Набор параметров форматирования, предлагаемый пользователю в данной группе, зависит от выделенного объекта: *Параметры ряда*, *Параметры маркера*, *Цвет линии*, *Заливка*, *Цвет границы*, *Стили границ*, *Тень*, *Формат объемной фигуры*, *Выравнивание* и др.



**Рис. 6.14** Вкладка *Формат* → группа *Текущий фрагмент*

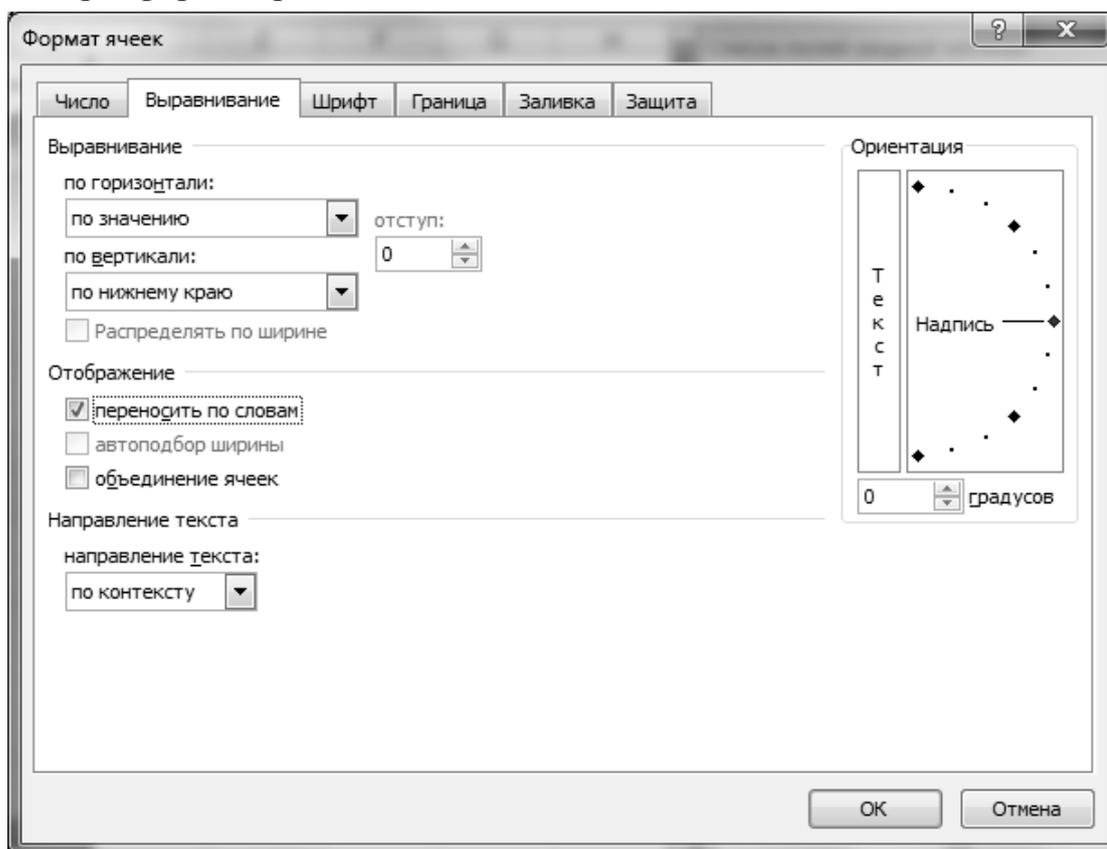
Форматирование объектов диаграммы можно выполнить также и с помощью контекстного меню, вызываемого к нужному объекту диаграммы. И далее в раскрывшемся списке команд можно выбрать нужную команду *Формат...* Раскрывающиеся в результате окна диалога по форматированию объектов диаграммы содержат разные и по количеству и по содержимому вкладки. Количество и содержимое этих вкладок зависят от тех объектов диаграммы, к которым они вызваны.

### Форматирование отчета сводной таблицы

Для форматирования сводной таблицы можно подобрать стиль оформления, для чего следует выбрать вкладку *Конструктор* → группу *Стили сводной таблицы* → выбрать нужный стиль оформления сводной таблицы.

Для изменения макета сводной таблицы можно выбрать вкладку *Конструктор* → группу *Макет* → выбрать нужные параметры форматирования макета сводной таблицы.

Для форматирования сводной таблицы по желанию пользователя следует использовать кнопки на вкладке *Главная* в группах *Шрифт*, *Выравнивание*, *Число*, *Стили* или раскрыть одну из указанных групп. В результате загрузится окно диалога *Формат ячеек* (см. Рис.6.15), в котором на отдельных вкладках можно установить нужные параметры форматирования.



**Рис. 6.15** Окно диалога *Формат ячеек* вкладка *Выравнивание*

Вкладки окна диалога включают следующие параметры форматирования ячеек таблицы:

- форматирование символов текста в ячейках таблицы – *Шрифт*, *Размер*, *Цвет*, *Начертание* и др.;

- форматирование выравнивания и расположения содержимого ячеек таблицы - направление написания содержимого ячеек таблицы, перенос текста по словам в ячейках таблицы, ориентация направления написания текста в ячейках таблицы и др.;
- форматирование цвета заливки ячеек таблицы;
- форматирование границ сводного отчета;
- форматирование типа данных в ячейках таблицы и др. параметры

### Обновление данных в сводной таблице

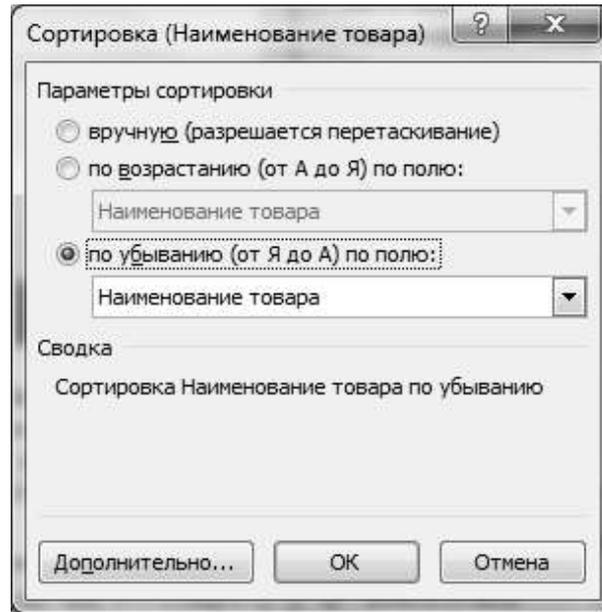
Изменения, вносимые в записи исходной базы данных, не отражаются в сводной таблице до тех пор, пока не будет выполнена команда обновления сводной таблицы. При этом курсор должен находиться в любой ячейке сводной таблицы. Операцию обновления данных можно выполнить одним из следующих способов:

- или выбрать вкладку *Параметры* → группу *Данные* → кнопку с раскрывающимся списком *Обновить* → команду *Обновить*;
- или в контекстном меню к сводной таблице выбрать команду *Обновить*;

### Сортировка записей сводной таблицы

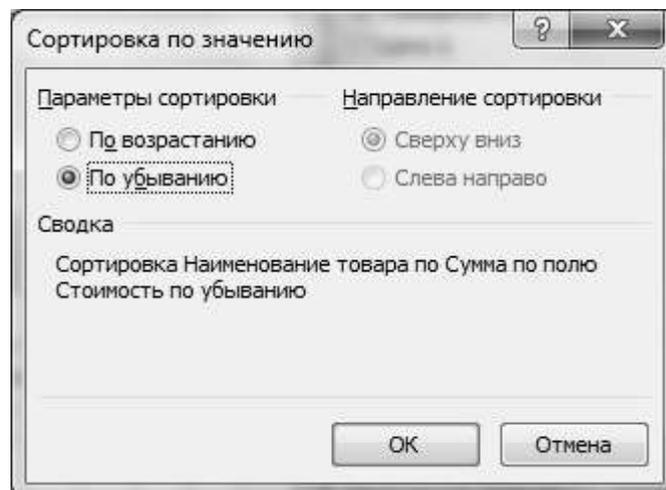
Для упорядочивания записей сводной таблицы по конкретному полю следует установить курсор в любую ячейку поля сводной таблицы, по которому следует упорядочить записи и далее:

- или выбрать вкладку *Данные* → группу *Сортировка и фильтр* → кнопку  *Сортировка по возрастанию* или кнопку  *Сортировка по убыванию*;
- или выбрать вкладку *Данные* → группу *Сортировка и фильтр* → кнопку *Сортировка*.
  - Если поле имеет текстовый формат то в результате загрузится окно диалога *Сортировка (название поля сводной таблицы)* (см. Рис.6.16), в котором следует выбрать направление сортировки с помощью переключателя  *по возрастанию (от А до Я) по полю*: или переключателя  *по убыванию (от Я до А) по полю*: и далее в раскрывающемся списке полей следует выбрать название поля, по которому следует выполнить упорядочивание данных.



**Рис. 6.16** Окно диалога *Сортировка (название поля сводной таблицы)*

- Если поле имеет числовой формат то в результате загрузится окно диалога *Сортировка по значению* (см. Рис.6.17), в котором следует выбрать направление сортировки с помощью переключателя  *По возрастанию* или переключателя  *По убыванию*.



**Рис. 6.17** Окно диалога *Сортировка по значению*

– или вызвать контекстное меню, в котором выбрать команду *Сортировка* → команду  *Сортировка по возрастанию* или команду  *Сортировка по убыванию*, или команду *Дополнительные параметры сортировки....*

В результате строки сводной таблицы будут упорядочены по выбранному направлению сортировки записей.

### Сворачивание и разворачивание полей сводной таблицы

Сворачивание и разворачивание полей сводной таблицы можно выполнить одним из следующих способов:

- или выбрать вкладку *Параметры* → группу *Активное поле* → кнопку  *Развернуть* / *Развернуть все поле* или кнопку  *Свернуть* / *Свернуть все поле*;
- или вызвать контекстное меню, в котором выбрать команду *Развернуть* / *Свернуть* → команду  *Развернуть* / *Развернуть все поле* или команду  *Свернуть* / *Свернуть все поле*.

Если данная операция применялась к строке сводной таблицы, то в результате или свернется содержимое конкретной строки сводной таблицы (команда *Свернуть*), или раскроется содержимое выделенной строки сводной таблицы (команда *Развернуть*).

Для того, чтобы данная операция сворачивания и разворачивания элементов сводной таблицы, была применена сразу по всем записям сводной таблицы, то следует выделить не текущую строку сводной таблицы, а заголовок поля сводной таблицы, а потом соответственно выполнить соответствующие операции *Развернуть* / *Свернуть*.

## §7. Компьютерный практикум по базам данных

### *База данных о странах мира*

Дана таблица с информацией о странах мира со следующей структурой: *Страна, Континент, Столица, Численность населения, Площадь.*

Страна	Континент	Столица	Численность населения (млн. чел.)	Площадь (тыс. кв. км.)
Аргентина	Южная Америка	Буэнос–Айрес	32,7	2767,0
Нидерланды	Европа	Амстердам	15,0	41,8
Кувейт	Азия	Эль–Кувейт	1,4	17,8
Финляндия	Европа	Хельсинки	5,0	338,1
Саудовская Аравия	Азия	Эр–Рияд	15,5	2240,0
Парагвай	Южная Америка	Асунсьон	4,4	406,8
Франция	Европа	Париж	56,7	544,0
Суринам	Южная Америка	Парамарибо	0,4	163,3
Ямайка	Северная Америка	Кингстон	2,5	11,0
Исландия	Европа	Рейкьявик	0,3	103,0
Алжир	Африка	Алжир	26,0	2381,7
Испания	Европа	Мадрид	39,0	504,8
Мексика	Северная Америка	Мехико	85,7	1958,2
Италия	Европа	Рим	57,7	301,3
Индия	Азия	Дели	859,2	3287,3
Германия	Европа	Берлин	79,5	357,1
Коста–Рика	Северная Америка	Сан–Хосе	3,1	51,1
Сирия	Азия	Дамаск	12,8	185,2
Мальта	Европа	Валлетта	0,4	0,3
Египет	Африка	Каир	54,5	997,7
Кения	Африка	Найроби	25,2	580,4
Австрия	Европа	Вена	7,7	83,9
Швейцария	Европа	Берн	6,8	41,3
Канада	Северная Америка	Оттава	26,8	9970,6
Марокко	Африка	Рабат	26,4	710,9

- А.** Осуществить создание базы данных о странах мира в электронной таблице.
- В.** Определить пользовательские имена - для базы данных, полей базы данных и записей базы данных.
- С.** Осуществить выборку значений из базы данных.

- D.** Выполнить поиск значений в базе данных.
- E.** Выполнить сортировку записей в базе данных.
- F.** Выполнить выборку записей из базы данных в режиме фильтрации (Автофильтр и Расширенный фильтр).
- G.** Построить сводные таблицы и сводные диаграммы.

#### **A. Создание базы данных о странах мира**

- Описать структуру базы данных, для чего в первой строке электронной таблицы ввести названия полей базы данных: *Страна*, *Континент*, *Столица*, *Численность населения (млн. чел.)*, *Площадь (тыс. кв. км.)* и отформатировать заполненные ячейки. Рабочий лист назвать *БД Страны мира*.
- Определить границы базы данных (вкладка *Вставка* → группа *Таблица* → кнопка *Таблица*).
- Ввести данные в таблицу о странах мира с клавиатуры.

*Замечание:* Поле *Континент* содержит повторяющиеся значения названий континентов, поэтому для ввода данных в это поле можно использовать:

- или возможности по *Автозавершению значений ячеек*;
- или возможности контекстного меню - *Выбор из раскрывающегося списка*;
- или можно организовать в ячейках этого поля формат раскрывающегося списка из уже заранее введенных значений (вкладка *Данные* → группа *Работа с данными* → кнопка с раскрывающимся списком *Проверка данных* → команда *Проверка данных...* (см. ниже ввод данных в поле *Континент*).
- Ввод данных в поле *Континент* следует выполнить, установив в ячейках этого поля формат раскрывающегося списка, который содержит заранее введенные всевозможные названия континентов. Для чего следует:
  - создать таблицу *Спр\_Континенты* с названиями всевозможных континентов на отдельном рабочем листе книги, который можно назвать *Справочники*.

<b>Спр_Континенты</b>
Азия
Африка
Европа
Южная Америка
Северная Америка

- Определить границы этой таблицы и придать ей статус базы данных (вкладка *Вставка* → группа *Таблица* → кнопка *Таблица*).

- Задать пользовательское имя *Спр\_Континенты* для введенной таблицы названий континентов (вкладка *Формулы* → группа *Определенные имена* → кнопка *Создать из выделенного фрагмента*).
- На рабочем листе *БД\_Страны\_мира* в ячейках поля *Континент* необходимо создать раскрывающийся список из элементов созданной таблицы *Спр\_Континенты*. Для этого можно выбрать вкладку *Данные* → группу *Работа с данными* → кнопку с раскрывающимся списком *Проверка данных* → команду *Проверка данных...* В результате загрузится окно диалога *Проверка вводимых значений* (см. Рис.4.5), в котором на вкладке *Параметры* в группе *Условие проверки* в раскрывающемся списке *Тип данных*: выбрать тип *Список*, а в окне ввода данных *Источник*: указать диапазон ячеек, в которых находятся заранее введенные названия континентов, а именно ячейки таблицы *Спр\_Континенты*. Вызвать имя указанной таблицы можно или с помощью вкладки *Формулы* → группы *Определенные имена* → кнопки с раскрывающимся списком *Использовать в формуле* → и далее выбрать нужное имя из списка имен книги или с помощью функциональной клавиши *F3*.

На вкладке *Сообщение для ввода* в окнах ввода *Заголовок* и *Сообщение* окна диалога *Проверка вводимых значений* можно ввести текст, который будет появляться в виде подсказки около текущей ячейки на рабочем листе, то есть когда на этой ячейке будет находиться табличный курсор. Например, можно ввести следующий текст в соответствующих окнах ввода:

Окно ввода *Заголовок*: Табличный курсор находится в поле *Континент*.

Окно ввода *Сообщение*: Выберите название нужного Вам континента из раскрывающегося списка с помощью левой кнопки мыши.

На вкладке *Сообщение об ошибке* в окнах ввода *Заголовок* и *Сообщение* окна диалога *Проверка вводимых значений* можно ввести текст, который будет появляться на экране, если в текущую ячейку будет вводиться значение, отличное от значений, перечисленных в таблице *Спр\_Континенты*. Например, можно ввести следующий текст в соответствующих окнах ввода:

Окно ввода *Заголовок*: Вы ошиблись!

Окно ввода *Сообщение*: Введенное название континента отсутствует в справочнике названий континентов. Дополните справочник новым значением и повторите ввод.

### **В. Создание пользовательского имени базы данных**

- Выделить диапазон ячеек, в которых располагается база данных.
- Выбрать вкладку *Формулы* → группу *Определенные имена* → кнопку с раскрывающимся списком *Присвоить имя* → команду *Присвоить имя...*
- Ввести имя для базы данных *Страны\_мира*.

В результате будут созданы пользовательские имена базы данных *Страны\_мира*.

### **Создание пользовательских имен полей базы данных**

- Выделить диапазон ячеек, в которых располагается база данных, используя созданное пользовательское имя *Страны\_мира*.
- Выбрать вкладку *Формулы* → группу *Определенные имена* → кнопку *Создать из выделенного фрагмента*. В результате загрузится окно диалога *Создание имен из выделенного диапазона*, в котором следует установить флажок  в строке выше.

В результате будут созданы пользовательские имена полей базы данных *Страна*, *Континент*, *Столица*, *Численность\_населения\_(млн.чел.)*, *Площадь\_(тыс. кв. км.)*.

### **Создание пользовательских имен записей базы данных**

- Выделить диапазон ячеек, в которых располагается база данных, используя созданное пользовательское имя *Страны\_мира*.
- Выбрать вкладку *Формулы* → группу *Определенные имена* → кнопку *Создать из выделенного фрагмента*. В результате загрузится окно диалога *Создание имен из выделенного диапазона* установить флажок  в столбце слева.

В результате будут созданы пользовательские имена – ключи для записей базы данных *Аргентина*, *Нидерланды*, *Кувейт*, *Финляндия* и т.д.

*Замечание:* Название поля *Страна* находится на пересечении заголовков строк и столбцов и является и названием поля, поэтому в результате последнего присваивания на экран будет выведено сообщение, в котором предлагается заменить имя поля *Страна* на имя записи *Страна*. На этот запрос следует дать отрицательный ответ.

### **С. Выборка значений из базы данных:**

- 1) Континент, на котором расположена страна *Коста-Рика*.
- 2) Площадь страны *Ямайка*.
- 3) Численность населения страны *Кения*.
- 4) Столицу страны *Суринам*.

Результаты выборки с комментариями переместить на новый рабочий лист книги и присвоить ему имя *Выборка*.

Выборка значений из базы данных осуществляется в соответствии с созданными пользовательскими именами. Для этого следует в ячейку таблицы ввести формулу:

=Имя\_записи \_ Имя\_поля

Вызов списка пользовательских имен можно выполнить или с помощью вкладки *Формулы* → группы *Определенные имена* → кнопки с раскрывающимся списком *Использовать в формуле* → выбрать нужное имя из списка имен книги или с помощью функциональной клавиши *F*.

Символ пробела « \_ » определяет операцию пересечения диапазонов ячеек.

Для данного задания формулы будут выглядеть следующим образом:

= *Коста-Рика* \_ *Континент*

= *Ямайка* \_ *Площадь\_(тыс. кв. км.)*

= *Кения* \_ *Численность\_населения\_(млн.\_чел.)*

= *Суринам* \_ *Столица*

После ввода формулы в ячейку таблицы будет возвращено значение, находящееся на пересечении указанной записи и указанного поля.

По окончании выполнения операций над записями базы данных результаты выборки с комментариями переместить на новый рабочий лист книги и присвоить ему имя *Выборка*.

### **D.1. Вертикальный поиск значений в базе данных:**

- Возвратить название континента, на котором располагается страна *Мексика*.
- Возвратить название столицы страны *Марокко*.
- Возвратить численность населения страны *Франция*.
- Возвратить площадь страны *Алжир*.

Результаты вертикального поиска с комментариями переместить на новый рабочий лист книги и присвоить ему имя *Поиск\_ВПР*.

Вертикальный поиск в базе данных *Страны\_мира* можно выполнить с помощью функции *ВПР(...)* из категории *Ссылки и массивы* (см. Рис.5.1). Данная функция выполняет вертикальный поиск в крайнем левом столбце таблицы и возвращает значение из найденной строки и указанного столбца таблицы.

Для данного задания формулы будут выглядеть следующим образом:

Комментарий	Формула	Результат
Континент, на котором располагается страна <i>Мексика</i>	=ВПР("Мексика"; Страны_мира; 2; 0)	Северная Америка
Название столицы страны <i>Марокко</i>	=ВПР("Марокко"; Страны_мира; 3; 0)	Рабат
Численность населения страны <i>Франция</i>	=ВПР("Франция"; Страны_мира; 4; 0)	56,7
Площадь страны <i>Алжир</i>	=ВПР("Алжир"; Страны_мира; 5; 0)	2381,7

## Д.2. Горизонтальный поиск значений в базе данных:

- Возвратить название континента, на котором располагается страна *Парагвай*.
- Возвратить название столицы страны *Кения*.
- Возвратить численность населения страны *Канада*.
- Возвратить площадь страны *Италия*.

Для выполнения горизонтального поиска в базе данных, саму базу данных предварительно необходимо транспонировать, то есть строки в таблице заменить на столбцы, а столбцы заменить на строки.

Результаты горизонтального поиска с комментариями переместить на другой лист рабочей книги и дать ему имя *Поиск\_ГПР*.

Для выполнения горизонтального поиска в базе данных следует транспонировать исходную базу данных *Страны\_мира*. Перед транспонированием необходимо определить в исходной базе данных количество строк и количество столбцов с помощью функций *ЧСТРОК(...)* и *ЧИСЛСТОЛБ(...)* из категории *Ссылки и массивы*. В качестве аргумента у этих функций следует указать исходную базу данных *Страны\_мира*.

Транспонирование исходной базы данных можно выполнить с помощью функции *ТРАНСП(...)* из категории *Ссылки и массивы*. В качестве аргумента у этой функции следует указать исходную базу данных *Страны\_мира*. Результатом выполнения функции *ТРАНСП(...)* должна стать база данных, в которой строки заменены на столбцы, а столбцы заменены на строки исходной базы данных. Но после выхода из *Мастера функций* результатом применения функции *ТРАНСП(...)* является одна заполненная ячейка. Для получения всей транспонированной базы данных целиком

необходимо после выхода из *Мастера функций* выполнить следующую последовательность шагов, которая применяется обычно при обработке массивов данных:

- Выделить область таблицы, в которой должна располагаться результирующая база данных, начиная с той ячейки, в которой записана функция *ТРАНСП(...)*. Размеры результирующей базы данных были предварительно определены с помощью функций *ЧСТРОК(...)* и *ЧИСЛСТОЛБ(...)*.
- Далее нажать функциональную клавишу *F2* – режим редактирования ячейки таблицы.
- Далее нажать комбинацию клавиш *Ctrl + Shift + Enter*.

В результате табличный процессор *Microsoft Excel* заполнит выделенный диапазон ячеек полученными значениями транспонированной матрицы. Следует обратить внимание на формулу в *Строке формул* – само выражение формулы будет взято в фигурные скобки (см. Рис.5.2).

Полученной базе данных следует присвоить пользовательское имя *Страны\_мира\_T* (вкладка *Формулы* → группа *Определенные имена* → кнопка с раскрывающимся списком *Присвоить имя* → команда *Присвоить имя...*).

Горизонтальный поиск в базе данных *Страны\_мира\_T* можно выполнить с помощью функции *ГПР(...)* из категории *Ссылки и массивы*. Данная функция ищет значение в верхней строке таблицы и возвращает значение из найденного столбца и из указанной строки таблицы.

Для данного задания формулы и результаты будут выглядеть следующим образом:

Комментарий	Формула	Результат
Континент, на котором располагается страна <i>Парагвай</i>	=ГПР("Парагвай"; Страны_мира_T; 2; 0)	Южная Америка
Название столицы страны <i>Кения</i>	=ГПР("Кения"; Страны_мира_T; 3; 0)	Найроби
Численность населения страны <i>Канада</i>	=ГПР("Канада "; Страны_мира_T; 4; 0)	26,8
Площадь страны <i>Италия</i>	=ГПР("Италия"; Страны_мира_T; 5; 0)	301,3

После окончания результаты горизонтального поиска с комментариями переместить на другой лист рабочей книги и дать ему имя *Поиск\_ГПР*.

### Е. Сортировка записей базы данных:

- 1) по названию стран в алфавитном порядке по возрастанию;
- 2) по названию континентов в алфавитном порядке по убыванию;
- 3) по названию континентов и стран в алфавитном порядке по возрастанию;
- 4) по величине численности населения в порядке убывания;
- 5) по названию континентов в алфавитном порядке по возрастанию и величине площади стран в порядке убывания.

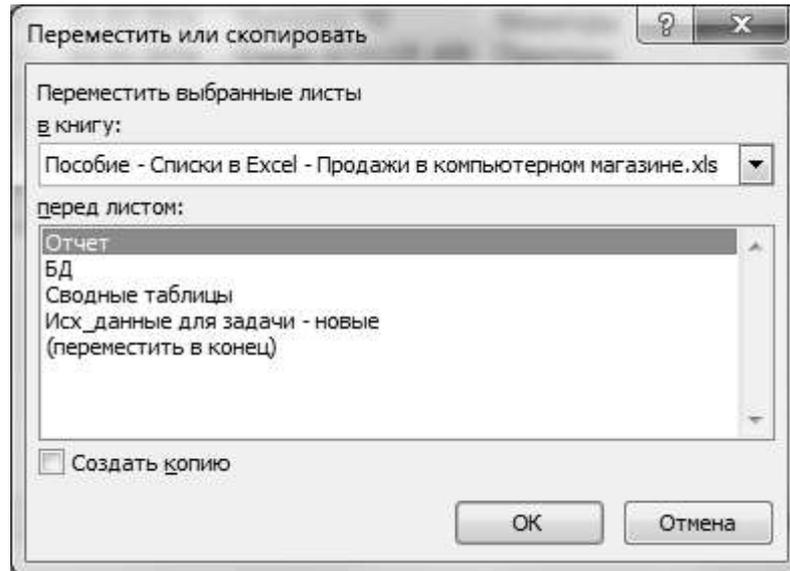
Результаты сортировки записей базы данных для наглядности результатов разместить на отдельных рабочих листах книги и дать им соответствующие имена *Сортировка\_1, Сортировка\_2, ..., Сортировка\_5*.

Для выполнения текущего задания следует в книгу предварительно вставить 5 новых рабочих листов с исходной базой данных, чтобы на отдельных листах выполнить задания по сортировке записей базы данных. Вставку рабочих листов в книгу можно выполнить одним из следующих способов:

- или выбрать на полосе с ярлычками листов ярлык *Вставить лист*;
- или нажать комбинацию клавиш *Shift + F11*;
- или выбрать вкладку *Главная* → группу *Ячейки* → кнопку *Вставить* → команду *Вставить лист*;
- или вызвать контекстное меню к ярлыку текущего рабочего листа, в котором следует выбрать команду *Вставить...* → *Лист*.

В результате чего в книгу перед текущим рабочим листом вставится новый рабочий лист. Только в первом случае рабочий лист вставится в конец полосы с рабочими листами. И далее следует скопировать на этот рабочий лист исходную базу данных *Страны\_мира* с рабочего листа *БД\_Страны мира* через буфер обмена. Для копирования базы данных ее необходимо предварительно выделить и далее можно воспользоваться или кнопкой  *Копировать*, которая находится на вкладке *Главная* в группе *Буфер обмена*, или командой контекстного меню *Копировать*, или комбинацией клавиш *Ctrl + C*.

Можно скопировать сам рабочий лист *БД\_Страны мира* вместе с исходной базой данных с помощью контекстного меню, в котором следует выбрать команду *Переместить / Скопировать...* В результате загрузится окно диалога *Переместить или Скопировать* (см. Рис.7.1), в котором в списке *перед листом*: следует выбрать расположение нового рабочего листа и обязательно установить флажок  *Создать копию*.



**Рис. 7.1** Окно диалога *Переместить или скопировать*

Рабочий лист с базой данных можно скопировать и с помощью клавиатуры. Для этого следует перетащить левой кнопкой мыши ярлык текущего рабочего листа с базой данных вправо или влево относительно текущего рабочего листа, при этом удерживая нажатой клавишу *Ctrl*. В результате чего в книгу вставится новый рабочий лист с базой данных с похожим названием *БД\_Страны мира(2)* (см. Рис.7.2).

24	Аргентина	Америка	
25	Боливия	Америка	
26	Бразилия	Америка	
27	Венесуэла	Америка	
28	Канада	Америка	
29	Колумбия	Америка	

Готово

**Рис. 7.2** Копирование рабочего листа с помощью клавиатуры

Сортировку записей базы данных можно выполнить с помощью кнопок  *Сортировка по возрастанию*,  *Сортировка по убыванию*, *Сортировка*, находящихся на вкладке *Данные* в группе *Сортировка и фильтр*.

### **Ф.1. Выборка записей из базы данных в режиме Автофильтра**

- 1) Выбрать страны европейского континента.
- 2) Выбрать страны, названия которых начинаются с буквы "А".
- 3) Выбрать страны, названия которых начинаются с буквы "К" и численность населения которых составляет более 3 млн. человек.
- 4) Выбрать страны, названия которых начинаются с буквы "М" и площадь которых составляет менее 5 тыс. кв. км.
- 5) Выбрать страны африканского континента с площадью более 500 тыс. кв. км.

- 6) Выбрать страны, в названиях столиц которых используется символ "—".
- 7) Выбрать страны с численностью населения от 10 до 20 млн. человек.
- 8) Выбрать страны с площадью менее 300 или более 2000 тыс.кв.км.
- 9) Выбрать первые 10 стран с наибольшей численностью населения.
- 10) Выбрать первые 5 стран с наименьшей площадью.

Каждое из заданий для наглядности результатов выполнить на отдельном рабочем листе, которые назвать соответственно *Фильтр\_1*, *Фильтр\_2*, ..., *Фильтр\_10*.

Для выполнения текущего задания следует в книгу предварительно вставить 10 новых рабочих листов с исходной базой данных, чтобы на отдельных листах выполнить задания по выборке записей из базы данных (способы вставки рабочих листов в книгу описаны выше) и присвоить им имена *Фильтр\_1*, *Фильтр\_2*, ..., *Фильтр\_10*.

Признаком включенного режима *Фильтра* является то, что в строке с заголовками полей базы данных около каждого наименования поля находится кнопка с изображением стрелки . При выборе этой кнопки раскрывается список команд, позволяющий осуществлять сортировку и отбор записей по определенным критериям.

Если же в базе данных не включен режим *Фильтра*, то для его активизации можно выбрать вкладку *Данные* → группу *Сортировка и Фильтр* → кнопку *Фильтр*. После чего в строке с заголовками полей базы данных около каждого наименования поля появится кнопка с изображением стрелки  и появится возможность отбирать записи по определенным критериям.

Для выполнения данного задания можно выполнить следующую последовательность шагов:

- 1) Выбрать страны европейского континента:
  - в раскрывающемся списке фильтра поля *Континент* установить флажок  *Европа*.
- 2) Выбрать страны, названия которых начинаются с буквы "А":
  - в раскрывающемся списке фильтра поля *Страна* выбрать команду *Текстовые фильтры* → команду *начинается с...* или команду *Настраиваемый фильтр...*;
  - в раскрывшемся окне диалога *Пользовательский автофильтр* (см. Рис.5.7) в раскрывающемся списке вариантов фильтрации выбрать фильтр *начинается с* и в окне ввода справа ввести символ "А".
- 3) Выбрать страны, названия которых начинаются с буквы "К" численность населения которых составляет более 3 млн. человек:

- в раскрывающемся списке фильтра поля *Страна* выбрать команду *Текстовые фильтры* → команду *начинается с...* или команду *Настраиваемый фильтр...*;
  - в раскрывшемся окне диалога *Пользовательский автофильтр* в раскрывающемся списке вариантов фильтрации выбрать фильтр *начинается с* и в окне ввода справа ввести символ "К";
  - в раскрывающемся списке фильтра поля *Численность населения* выбрать команду *Числовые фильтры* → команду *больше* или команду *Настраиваемый фильтр...*;
  - в раскрывшемся окне диалога *Пользовательский автофильтр* в раскрывающемся списке вариантов фильтрации выбрать фильтр *больше* и в окне ввода справа ввести значение "3".
- 4) Выбрать страны, названия которых начинаются с буквы "М" площадь которых составляет менее 5 тыс. кв. км.:
- в раскрывающемся списке фильтра поля *Страна* выбрать команду *Текстовые фильтры* → команду *начинается с...* или команду *Настраиваемый фильтр...*;
  - в раскрывшемся окне диалога *Пользовательский автофильтр* в раскрывшемся списке вариантов фильтрации выбрать фильтр *начинается с* и в окне ввода справа ввести символ "М";
  - в списке фильтра поля *Площадь* выбрать команду *Числовые фильтры* → команду *меньше* или команду *Настраиваемый фильтр...*
  - в раскрывшемся окне диалога *Пользовательский автофильтр* в раскрывшемся списке вариантов фильтрации выбрать фильтр *меньше* и в окне ввода справа ввести значение "5".
- 5) Выбрать страны африканского континента с площадью более 500 тыс. кв. км. :
- в раскрывающемся списке фильтра поля *Континент* установить флажок  *Африка*,
  - в раскрывающемся списке фильтра поля *Площадь* выбрать команду *Числовые фильтры* → команду *больше* или команду *Настраиваемый фильтр...*;
  - в раскрывшемся окне диалога *Пользовательский автофильтр* в раскрывающемся списке вариантов фильтрации выбрать фильтр *больше* и в окне ввода справа ввести значение "500".
- 6) Выбрать страны, в названиях столиц которых используется символ "—" :

- в раскрывающемся списке фильтра поля *Столица* выбрать команду *Текстовые фильтры* → команду *содержит...* или команду *Настраиваемый фильтр...*;
  - в раскрывшемся окне диалога *Пользовательский автофильтр* в раскрывающемся списке вариантов фильтрации выбрать фильтр *содержит* и в окне ввода справа ввести символ "—".
- 7) Выбрать страны с численностью населения от 10 до 20 млн. человек.
- в раскрывающемся списке фильтра поля *Численность населения* выбрать команду *Числовые фильтры* → команду *больше* или команду *Настраиваемый фильтр...*;
  - в раскрывшемся окне диалога *Пользовательский автофильтр* в раскрывающемся списке вариантов фильтрации выбрать фильтр *больше* и в окне ввода справа ввести значение "10";
  - выбрать переключатель  *И* ;
  - в следующей строке в раскрывающемся списке вариантов фильтрации выбрать фильтр *меньше* и в окне справа ввести значение "20".
- 8) Выбрать страны с площадью менее 300 или более 2000 тыс.кв.км.:
- в раскрывающемся списке фильтра поля *Площадь* выбрать команду *Числовые фильтры* → команду *меньше* или команду *Настраиваемый фильтр...*;
  - в раскрывшемся окне диалога *Пользовательский автофильтр* в раскрывающемся списке вариантов фильтрации выбрать фильтр *меньше* и в окне ввода справа ввести значение "300";
  - выбрать переключатель  *ИЛИ* ;
  - в следующей строке в раскрывающемся списке вариантов фильтрации выбрать фильтр *больше* и в окне справа ввести значение "2000".
- 9) Выбрать первые 10 стран с наибольшей численностью населения:
- в раскрывающемся списке фильтра поля *Численность населения* выбрать команду *Числовые фильтры* → команду *Первые 10...*;
  - в раскрывшемся окне диалога *Наложение условия по списку* (см. Рис.5.6) в раскрывающемся списке выбрать вариант *наибольших*;
  - в окне счетчика подобрать нужное количество записей 10;
  - оставить значение *элементов списка*.
- 10) Выбрать первые 5 стран с наименьшей площадью:
- в раскрывающемся списке фильтра поля *Площадь* выбрать команду *Числовые фильтры* → команду *Первые 10...*;

- в раскрывшемся окне диалога *Наложение условия по списку* в раскрывающемся списке выбрать вариант *наименьших*;
- в окне счетчика подобрать нужное количество записей 5;
- оставить значение *элементов списка*.

## **Г.2. Выборка записей в режиме *Расширенного фильтра***

- 1) Выбрать страны, названия которых начинаются с буквы "К" и численность населения которых составляет более 10 млн. человек.
- 2) Выбрать страны, названия которых начинаются с букв "К" или "М" и площадь которых составляет менее 50 или более 10000 тыс. кв. км.
- 3) Выбрать страны, численность населения которых составляет от 20 до 100 млн. человек.

Задание выполнить на отдельном рабочем листе книги, который назвать *Расш\_Фильтр*.

Для выполнения текущего задания следует в книгу предварительно вставить новый рабочий лист с исходной базой данных и присвоить ему имя *Расш\_Фильтр* (способы вставки рабочих листов описаны выше).

Для применения режима *Расширенного фильтра* на рабочем листе книги необходимо определить ячейки, в которых будет задан *диапазон условий отбора записей*. Это могут быть ячейки как текущего рабочего листа, на котором располагается база данных, так и ячейки нового рабочего листа. Рассмотрим первый вариант расположения. В этом случае можно вставить пустые строки над строкой заголовков полей базы данных, в которых будет задан диапазон условий отбора записей. Вставку строк на рабочий лист можно выполнить одним из следующих способов. Предварительно выделить несколько строк, начиная со строки с заголовками полей базы данных (количество выделенных строк зависит от количества строк, необходимых для задания критериев для отбора записей). Далее можно выбрать или вкладку *Главная* → группу *Ячейки* → кнопку с раскрывающимся списком *Вставить* → команду *Вставить строки на лист*, или в контекстном меню к выделенным строкам выбрать команду *Вставить*. В результате перед строкой с заголовками полей базы данных вставятся пустые строки, количество которых совпадает с количеством предварительно выделенных строк.

Далее, в первую пустую вставленную строку следует скопировать названия полей базы данных. А во второй строке и далее, под соответствующими заголовками полей базы данных следует задать критерии фильтрации записей базы данных. Между

созданным диапазоном условий отбора записей и базой данных на рабочем листе должна находиться как минимум одна пустая строка.

Для выполнения практического задания № 1) можно выполнить следующую последовательность шагов:

1) Выбрать страны, названия которых начинаются с буквы "К" и численность населения которых составляет более 10 млн. человек.

– Сформировать диапазон условий отбора записей:

Страна	Континент	Столица	Численность населения (млн. чел.)	Площадь (тыс. кв. км.)
= "К"			= ">10"	

- Установить табличный курсор в любую ячейку исходной базы данных.
- Выбрать вкладку *Данные* → группу *Сортировка и фильтр* → кнопку *Дополнительно*. В результате загрузится окно диалога *Расширенный фильтр* (см. Рис.5.8), в котором:
  - в группе переключателей *Обработка* можно установить переключатель  *фильтровать список на месте*;
  - в окне ввода *Исходный диапазон*: указать диапазон ячеек, в котором располагается база данных *Страны\_мира*. Если перед вызовом окна диалога *Расширенный фильтр* табличный курсор находился в любой ячейке исходной базы данных или база данных была предварительно выделена, то в этом окне ввода автоматически уже будет указан диапазон ячеек, в котором находится база данных. В противном же случае, следует ввести пользовательское имя базы данных или выделить диапазон ячеек, в котором располагается база данных одним из следующих способов: или вызвать созданное пользовательское имя базы *Страны\_мира* данных с помощью вкладки *Формулы* → группы *Определенные имена* → кнопки с раскрывающимся списком *Использовать в формуле* → имя *Страны\_мира*, или нажать функциональную клавишу *F3*.
  - в окне ввода *Диапазон условий*: указать диапазон ячеек, в которых описан диапазон условий отбора записей.

В результате табличный процессор *Microsoft Excel* отобразит на экране только те записи базы данных, которые будут удовлетворять заданному условию отбора. Для снятия режима фильтрации и отображения всех записей базы данных, если был выбран установить переключатель  *фильтровать на месте*, следу-

ет выбрать вкладку *Данные* → группу *Сортировка и Фильтр* → кнопку *Очистить*.

В режиме расширенного фильтра можно не фильтровать базу данных на месте, а скопировать результат фильтрации записей в указанные пользователем ячейки текущего рабочего листа, на котором располагается база данных. Для этого при установке параметров для расширенного фильтра в окне диалога *Расширенный фильтр* (см. Рис.5.8) в группе переключателей *Обработка* вместо переключателя  *фильтровать список на месте* следует установить переключатель  *скопировать результат в другое место*. И далее в окне ввода *Поместить результат в диапазон*: указать ссылку ячейку области вставки - верхняя левая ячейка, с которой должны начинаться записи отфильтрованной базы данных. В результате табличный процессор *Microsoft Excel* в указанную пользователем область вставит только те записи базы данных, которые будут удовлетворять заданным критериям фильтрации записей.

- 2) Выбрать страны, названия которых начинаются с букв "К" или "М" и площадь которых составляет менее 50 или более 10000 тыс. кв. км.

Диапазон условий отбора записей для данного практического задания будет выглядеть следующим образом:

Страна	Континент	Столица	Численность населения (млн. чел.)	Площадь (тыс. кв. км.)
= "К"				= "<50"
= "К"				= ">10000"
= "М"				= "<50"
= "М"				= ">10000"

Результаты фильтрации записей базы данных поместить рядом с исходной базой данных в отдельные ячейки рабочего листа.

- 3) Выбрать страны, численность населения которых составляет от 20 до 100 млн. человек.

Диапазон условий отбора записей будет выглядеть следующим образом:

Страна	Континент	Столица	Численность населения (млн. чел.)	Площадь (тыс. кв. км.)	Численность населения (млн. чел.)
			= ">20"		= "<100"

Результаты выборки записей базы данных поместить рядом с исходной базой данных в отдельные ячейки рабочего листа.

### Г.1. Построение сводной таблицы

Построить сводную таблицу, отражающую численность населения различных стран. Разместить ее на отдельном рабочем листе книги и присвоить ему имя *Сводная\_Численность*.

- Установить табличный курсор в любую ячейку исходной базы данных *Страны\_мира*.
- Выбрать вкладку *Вставка* → группу *Таблицы* → кнопку с раскрывающимся списком *Сводная таблица* → команду *Сводная таблица*. В результате табличный процессор *Microsoft Excel* вставит в книгу новый рабочий лист, на котором будет пустой макет сводной таблицы.
- В область макета сводной таблицы *Фильтр отчета* перетащить кнопку с названием поля базы данных Континент;
- В область макета сводной таблицы *Названия строк* перетащить кнопку с названием поля базы данных Страна;
- В область макета сводной таблицы *Σ Значения* перетащить кнопку с названием поля базы данных Численность населения. К значениям поля базы данных *Численность населения* по умолчанию будет применена функция суммирования *СУММ(...)*.

В результате макет сводной таблицы будет выглядеть следующим образом:

<b>Фильтр отчета</b> <i>Континент</i>	<b>Названия столбцов</b>
<b>Названия строк</b> <i>Страна</i>	<b>Σ Значения</b> <i>Сумма по полю Численность населения</i>

- Для поля *Сумма по полю Численность населения* следует установить параметры поля сводной таблицы – имя поля сводной таблицы *Численность населения* и формат представления числового формата *Числовой*,  *разделитель групп разрядов* (см. *Установка параметров полей сводной таблицы* и *Форматирование типов значений полей сводной таблицы*).
- Присвоить рабочему листу имя *Сводная\_Численность*.

## G.2. Построение сводной таблицы

Построить сводную таблицу, отражающую площадь различных стран. Разместить ее на отдельном рабочем листе книги и присвоить ему имя *Сводная\_Площадь*.

- Установить табличный курсор в любую ячейку исходной базы данных *Страны\_мира*.
- Выбрать вкладку *Вставка* → группу *Таблицы* → кнопку с раскрывающимся списком *Сводная таблица* → команду *Сводная таблица*. В результате табличный процессор *Microsoft Excel* вставит в книгу новый рабочий лист, на котором будет пустой макет сводной таблицы.
- В область макета сводной таблицы *Фильтр отчета* перетащить кнопку с названием поля базы данных Континент;
- В область макета сводной таблицы *Названия строк* перетащить кнопку с названием поля базы данных Страна;
- в область макета сводной таблицы  $\Sigma$  *Значения* перетащить кнопку с названием поля базы данных Площадь. К значениям поля базы данных *Площадь* по умолчанию будет применена функция суммирования *СУММ(...)*.

В результате макет сводной таблицы будет выглядеть следующим образом:

<b>Фильтр отчета</b> <i>Континент</i>	<b>Названия столбцов</b>
<b>Названия строк</b> <i>Страна</i>	<b><math>\Sigma</math> Значения</b> <i>Сумма по полю Площадь</i>

- Для поля *Сумма по полю Площадь* следует установить параметры поля сводной таблицы – имя поля сводной таблицы *Площадь* и формат представления числового формата *Числовой*,  *разделитель групп разрядов* (см. *Установка параметров полей сводной таблицы* и *Форматирование типов значений полей сводной таблицы*).
- Присвоить рабочему листу имя *Сводная\_Площадь*.

*Замечание:* Вставленные сводные таблицы следует отформатировать (см. *Форматирование отчета сводной таблицы*).

### *Анализ продаж компьютерного магазина*

- А.** Создать базу данных о продажах периферийных устройств в компьютерном магазине за период с 01.09.2014 по 30.09.2014.
- В.** Построить сводную таблицу для анализа товарооборота в разрезе товарных групп в течение рассматриваемого периода времени по дням.
- С.** Построить сводную таблицу для анализа товарооборота по дням недели в течение рассматриваемого периода времени.
- Д.** Построить сводную таблицу для анализа товарооборота товарных групп по неделям в течение рассматриваемого периода времени.
- Е.** Построить сводную таблицу для анализа физического объема недельных продаж отдельных товаров различных групп в течение рассматриваемого периода времени.
- Ф.** Выполнить анализ продаж по каждой из товарных групп, используя режим *Данные* → *Промежуточные итоги*.

#### **А. Создать базу данных следующей структуры:**

Дата продажи	Наименование товара	Товарная группа	Цена	Количество	Стоимость	День недели	Номер недели
...	...	...	...	...	...	...	...

База данных должна содержать не менее 300 записей. За один день должно быть введено 8-11 записей о продажах различных товаров.

- На отдельном рабочем листе *Справочники* создать таблицу *Товарные\_группы*, содержащую наименования товарных групп:

<b>Товарные группы</b>
ПК
Мониторы
Принтеры
Планшеты

Присвоить ей пользовательское имя *Товарные\_группы* (вкладка *Формулы* → группа *Определенные имена* → кнопка *Создать из выделенного фрагмента*).

Определить границы таблицы *Товарные\_группы* и присвоить ей статус базы данных (вкладка *Вставка* → группа *Таблицы* → кнопка *Таблица*).

– На рабочем листе *Справочники* создать таблицу *Товары* со следующей структурой:

- поле *Наименование товара* – наименования товаров вводятся с клавиатуры;
- поле *Товарная группа* – наименования товарных групп выбираются из раскрывающегося списка, созданного на основе таблицы *Товарные\_группы*. Формат раскрывающегося списка в ячейке столбца *Товарная группа* следует установить с помощью вкладки *Данные* → группы *Работа с данными* → кнопки с раскрывающимся списком *Проверка данных* → команды *Проверка данных...* В результате загрузится окно диалога *Проверка вводимых значений* (см. Рис.4.5), в котором следует в раскрывающемся списке *Тип данных*: выбрать тип *Список*, в окне ввода *Источник*: указать созданное пользовательское имя *Товарные\_группы*, содержащее ссылку на диапазон ячеек с наименованиями товарных групп;
- поле *Цена* - значения вводятся с клавиатуры.

Таблица *Товары*:

Наименование товара	Товарная группа	Цена
ПК X1	ПК	8 800
ПК X2	ПК	10 400
ПК X3	ПК	24 000
ПК X4	ПК	26 000
ПК X5	ПК	26 700
ПК X6	ПК	37 600
Монитор Z1	Мониторы	4 200
Монитор Z2	Мониторы	5 000
Монитор Z3	Мониторы	5 800
Монитор Z4	Мониторы	5 600
Монитор Z5	Мониторы	7 900
Монитор Z6	Мониторы	21 500
Принтер F1	Принтеры	6 400
Принтер F2	Принтеры	39 800
Принтер F3	Принтеры	6 600
Принтер F4	Принтеры	11 900
Принтер F5	Принтеры	3 600
Принтер F6	Принтеры	18 200
Планшет G1	Планшеты	4 500
Планшет G2	Планшеты	3 400
Планшет G3	Планшеты	8 200

Наименование товара	Товарная группа	Цена
Планшет G4	Планшеты	3 200
Планшет G5	Планшеты	4 600
Планшет G6	Планшеты	3 300

Присвоить введенной таблице пользовательское имя *Товары* (вкладка *Формулы* → группа *Определенные имена* → кнопка *Присвоить имя...*).

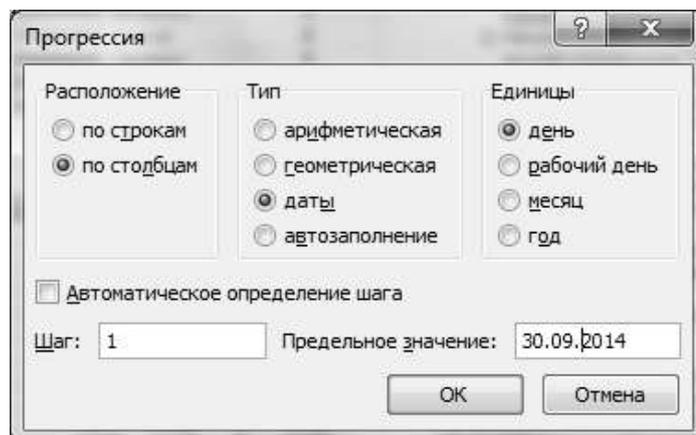
Определить границы таблицы *Товары* и присвоить ей статус базы данных (вкладка *Вставка* → группа *Таблицы* → кнопка *Таблица*).

– На рабочем листе *Справочники* создать таблицу *Рабочие дни* со следующей структурой:

- поле *Дата* – значения дат вводятся с клавиатуры в период с 01.09.2014 по 30.09.2014. Для построения ряда значений дат до 30.09.2014 можно использовать следующие возможности построения последовательностей в *Microsoft Excel*:

*1\_способ.* Ввести в ячейку таблицы с клавиатуры первую дату 01.09.2014 и далее с помощью маркера заполнения в смежных ячейках вниз по столбцу можно построить последовательность данных числового формата *Дата* с шагом +1 день до 30.09.2014.

*2\_способ.* Ввести в ячейку таблицы с клавиатуры первую дату 01.09.2014. Далее выбрать вкладку *Главная* → группу *Редактирование* → кнопку с раскрывающимся списком *Заполнить* → команду *Прогрессия...* В результате загрузится окно диалога *Прогрессия* (см. Рис.7.3), в котором в группе *Расположение* выбрать переключатель  *по столбцам*, в группе *Тип* выбрать переключатель  *даты*, в группе *Единицы* выбрать переключатель  *по столбцу*, в группе *Тип* выбрать переключатель  *даты*, в группе *Единицы* выбрать переключатель  *день*, в окне ввода *Шаг* ввести 1 и в окне *Предельное значение* ввести 30.09.2014.



**Рис. 7.3** Окно диалога *Прогрессия*

3\_способ. Ввести в ячейку таблицы с клавиатуры начальную дату 01.09.2014. В следующую ячейку таблицы ввести формулу, связывающую новую дату с предыдущей:

$$\text{текущая\_дата} = \text{предыдущая\_дата} + 1$$

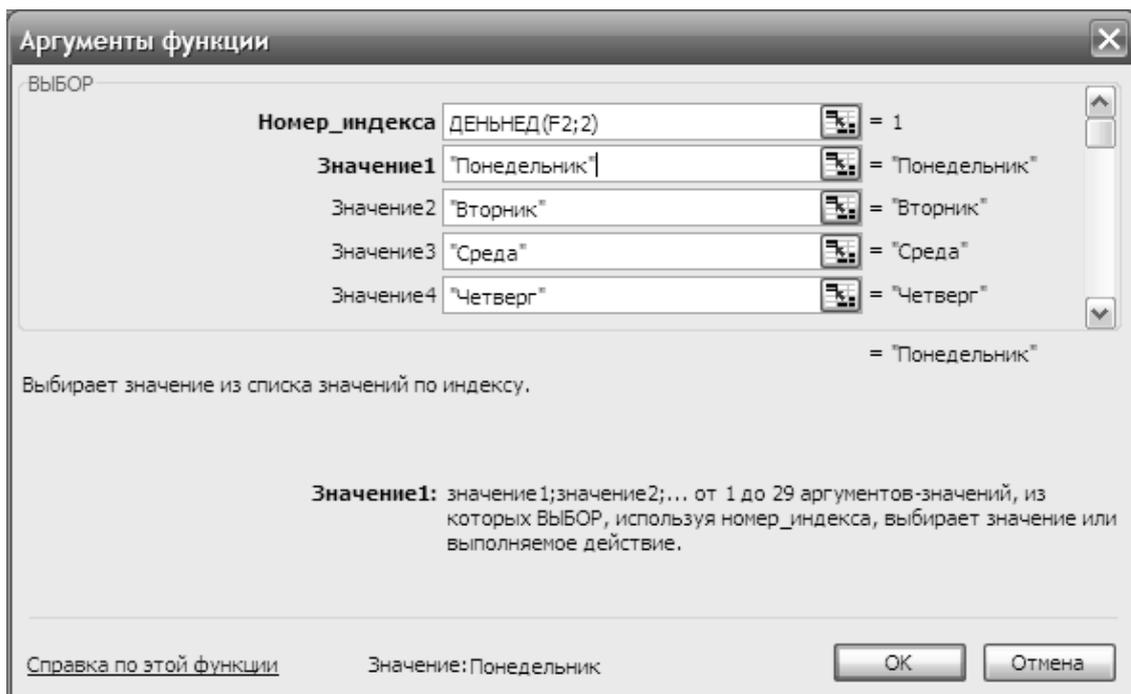
и далее с помощью маркера заполнения можно скопировать эту формулу в смежные ячейки столбца таблицы до значения 30.09.2014.

Во всех случаях табличный процессор *Microsoft Excel* построит столбец с рядом числовых значений формата дата от 01.09.2014 до 30.09.2014.

- поле *День недели* - вычисляется по введенной дате с помощью функций *ДЕНЬНЕД(...)* из категории *Дата и время* и функции *ВЫБОР(...)* из категории *Ссылки и массивы*. Функция *ДЕНЬНЕД(...)* определяет порядковый номер дня недели для указанной даты. Аргумент *Тип* у данной функции интерпретируется следующим образом:

Тип	Возвращаемое число
1 или опущен	Число от 1 (воскресенье) до 7 (суббота)
2	Число от 1 (понедельник) до 7 (воскресенье)
3	Число от 0 (понедельник) до 6 (воскресенье)

Функция *ВЫБОР(...)* выбирает значения из списка значений по указанному индексу. С помощью данной функции можно поставить каждому порядковому номеру дня недели текстовое название этого дня недели (см. Рис.7.4).



**Рис. 7.4** Окно аргумента функции *ВЫБОР (...)*

- поле *Номер недели* - вычисляется по введенной дате с помощью функции *НОМНЕДЕЛИ(...)* из категории *Дата и время*. Функция определяет порядковый номер недели с начала года для указанной даты. Аргумент *Тип\_возвр* у данной функции интерпретируется следующим образом:

Тип_возвр	Примечание
1	Неделя начинается с воскресенья
2	Неделя начинается с понедельника

Таблица *Рабочие\_дни*:

Дата	День недели	Номер недели
01.09.2014	Понедельник	36
02.09.2014	Вторник	36
03.09.2014	Среда	36
04.09.2014	Четверг	36
05.09.2014	Пятница	36
06.09.2014	Суббота	37
...	...	...
29.09.2014	Понедельник	40
30.09.2014	Вторник	40

Присвоить введенной таблице пользовательское имя *Рабочие\_дни* (вкладка *Формулы* → группа *Определенные имена* → кнопка *Присвоить имя...*).

Определить границы таблицы *Рабочие\_дни* и присвоить ей статус базы данных (вкладка *Вставка* → группа *Таблицы* → кнопка *Таблица*).

- Создать таблицу *Продажи периферийных устройств* со следующей структурой:

Дата продажи	Наименование товара	Товарная группа	Цена	Количество	Стоимость	День недели	Номер недели
...	...	...	...	...	...	...	...

- поле *Дата продажи* – значения выбираются из раскрывающегося списка, содержащего список дат из столбца *Дата* таблицы *Рабочие\_дни*.

Предварительно столбцу *Дата* из таблицы *Рабочие\_дни* следует присвоить пользовательское имя *Дата* (вкладка *Формулы* → группа *Определенные имена* → кнопка *Создать из выделенного фрагмента*).

Формат раскрывающегося списка в ячейке столбца *Дата продажи* следует установить с помощью вкладки *Данные* → группы *Работа с данными* → кнопки с раскрывающимся списком *Проверка данных* → команды *Проверка данных...* В результате загрузится окно диалога *Проверка вводимых значений* (см. Рис.4.5), в котором следует в раскрывающемся списке *Тип данных*: выбрать тип *Список*, в окне ввода *Источник*: указать созданное пользовательское имя *Дата*, содержащее ссылку на диапазон ячеек с датами из столбца *Дата* базы данных *Рабочие\_дни*.

- поле *Наименование товара* – значения выбираются из раскрывающегося списка, содержащего список наименований товаров из столбца *Наименование товара* таблицы *Товары*.

Предварительно столбцу *Наименование товара* из таблицы *Товары* следует присвоить пользовательское имя *Наименование\_товара* (вкладка *Формулы* → группа *Определенные имена* → кнопка *Создать из выделенного фрагмента*).

Формат раскрывающегося списка в ячейке столбца *Наименование товара* следует установить с помощью вкладки *Данные* → группы *Работа с данными* → кнопки с раскрывающимся списком *Проверка данных* → команды *Проверка данных...* В результате загрузится окно диалога *Проверка вводимых значений* (см. Рис.4.5), в котором следует в раскрывающемся списке *Тип данных*: выбрать тип *Список*, в окне ввода *Источник*: указать созданное пользовательское имя *Наименование\_товара*, содержащее ссылку на диапазон ячеек с наименованиями товаров из столбца *Наименование товаров* базы данных *Товары*.

- поле *Товарная группа* – значения выбираются из второго столбца таблицы *Товары* с помощью функции *ВПР(...)* из категории *Ссылки и массивы*.
- поле *Цена \$* - значения выбираются из третьего столбца таблицы *Товары* с помощью функции *ВПР(...)* из категории *Ссылки и массивы*.
- поле *Количество* – при вводе необходимо осуществлять проверку правильности ввода значений в это поле - *целое положительное число*. Это можно сделать с помощью вкладки *Данные* → группы *Работа с данными* → кнопки с раскрывающимся списком *Проверка данных* → команды *Проверка данных...* В результате загрузится окно диалога *Проверка вводимых значений* (см. Рис.4.5), в котором в раскрывающемся списке *Тип данных*: следует выбрать тип *Целое число*, в

раскрываемся списке *Значение*: следует выбрать операцию сравнения *больше или равно* и в окне ввода *Минимум*: ввести 1. В результате в ячейки данного столбца *Количество* можно будет вводить только целые положительные числа больше или равные 1.

- поле *Стоимость* – в это поле следует ввести формулу:  
$$= \text{Цена } \$ * \text{Количество.}$$
- поле *День недели* – значения выбираются из второго столбца таблицы *Рабочие\_дни* с помощью функции *ВПР(...)* из категории *Ссылки и массивы*.
- поле *Номер недели* – значения выбираются из третьего столбца таблицы *Рабочие\_дни* с помощью функции *ВПР(...)* из категории *Ссылки и массивы*.

Присвоить введенной таблице пользовательское имя *Продажи* (вкладка *Формулы* → группа *Определенные имена* → кнопка *Присвоить имя...*).

Определить границы таблицы *Рабочие\_дни* и присвоить ей статус базы данных (вкладка *Вставка* → группа *Таблицы* → кнопка *Таблица*);

## В. Создание сводной таблицы

Построить сводную таблицу для анализа товарооборота в разрезе товарных групп в течение рассматриваемого периода времени по дням. На основе полученной сводной таблицы построить диаграмму, отражающую структуру товарооборота по товарным группам; диаграмму, отражающую динамику продаж в течение рассматриваемого периода времени по дням.

- Установить табличный курсор в любую ячейку исходной базы данных *Продажи*.
- Выбрать вкладку *Вставка* → группу *Таблицы* → кнопку с раскрываемым списком *Сводная таблица* → команду *Сводная таблица*. В результате табличный процессор *Microsoft Excel* вставит в книгу новый рабочий лист, на котором будет пустой макет сводной таблицы.
- В область макета сводной таблицы *Названия строк* перетащить кнопку с названием поля базы данных *Дата продажи*;
- В область макета сводной таблицы *Названия столбцов* перетащить кнопку с названием поля базы данных *Товарная группа*;
- В область макета сводной таблицы  $\Sigma$  *Значения* перетащить кнопку с названием поля базы данных *Стоимость*.

В результате макет сводной таблицы будет выглядеть следующим образом:

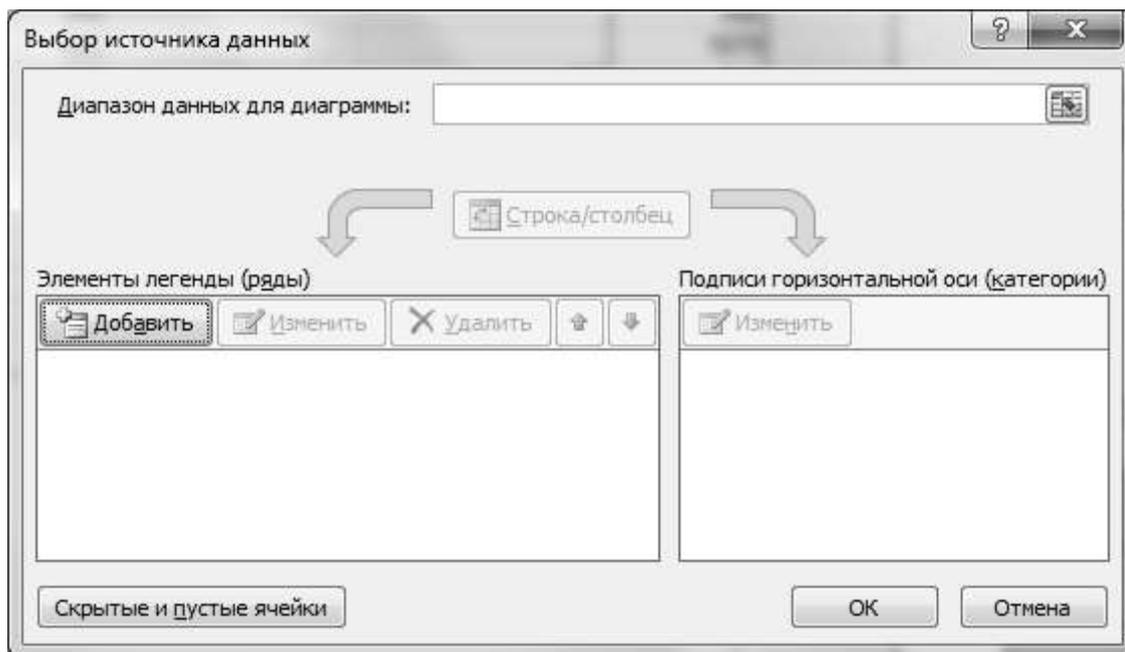
<b>Фильтр отчета</b>	<b>Названия столбцов</b>
	<i>Товарная группа</i>
<b>Названия строк</b>	<b>Σ Значения</b>
<i>Дата продажи</i>	<i>Сумма по полю Стоимость</i>

- Для поля сводной таблицы *Сумма по полю Стоимость* можно установить следующие параметры поля – в окне диалога *Параметры поля значений* (см. Рис.6.3) на вкладке *Операция* в списке операций выбрать операцию *Сумма*, в окне ввода *Пользовательское имя*: указать имя поля сводной таблицы *Стоимость* (добавить символ пробела до или после имени), с помощью кнопки *Числовой формат* выбрать числовой формат - *Денежный* (см. *Установка параметров полей сводной таблицы* и *Форматирование типов значений полей сводной таблицы*).
- Присвоить рабочему листу имя *Сводная\_Товарные\_группы*.

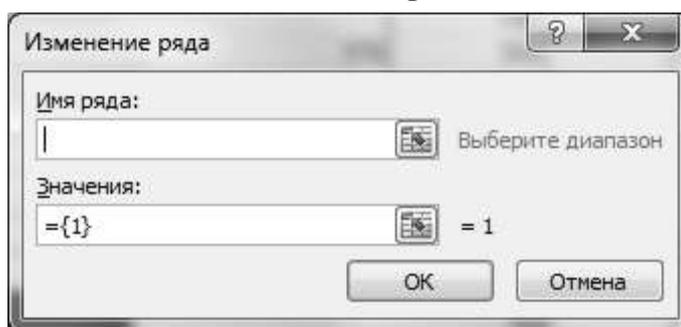
### Построение диаграммы

Для отображения на диаграмме отдельных значений из сводной таблицы следует установить табличный курсор за пределами сводной таблицы и только после этого выбрать вкладку *Вставка* → группу *Диаграммы* → выбрать тип диаграммы с помощью кнопок с раскрывающимся списком *Гистограмма, График, Круговая, Линейчатая* и др. В результате на рабочий лист вставится пустое окно для диаграммы, в которое можно будет добавить отдельные ряды данных для их отображения. Для этого следует выбрать вкладку *Конструктор* → группу *Данные* → кнопку *Выбрать данные*. В результате загрузится окно диалога *Выбор источника данных* (см. Рис.7.5), в котором для добавления ряда значений на диаграмму следует выбрать слева в списке *Элементы легенды (ряды)* кнопку *Добавить*.

В результате загрузится следующее окно диалога *Изменение ряда* (см. Рис.7.6), в котором следует в окне ввода *Имя ряда*: указать ссылку на ячейку, в которой находится имя ряда, значения которого отражаются на диаграмме, а в окне ввода *Значения*: указать ссылку на диапазон ячеек, в которых находятся отображаемые значения ряда.

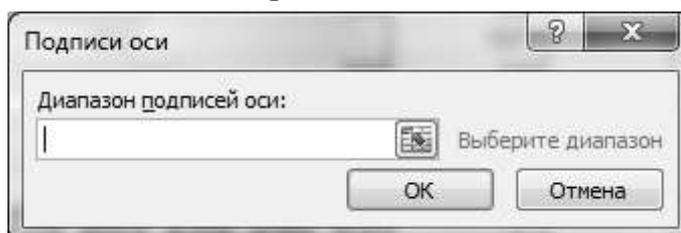


**Рис. 7.5** Окно диалога *Выбор источника данных*



**Рис. 7.6** Окно диалога *Изменение ряда*

В окне диалога *Выбор источника данных* справа в списке *Подписи горизонтальной оси (категории)* можно указать ссылку на диапазон ячеек, который можно использовать в качестве подписей значений по горизонтальной оси на диаграмме. Для этого можно выбрать кнопку *Изменить*. В результате загрузится окно диалога *Подписи оси* (см. Рис.7.7), в котором в окне ввода *Диапазон подписей оси*: можно указать ссылки на ячейки, в которых находятся названия рядов данных, которые можно использовать в качестве подписей по горизонтальной оси на диаграмме.



**Рис. 7.7** Окно диалога *Подписи оси*

В практическом задании для построения диаграммы, отражающей структуру товарооборота по товарным группам, следует:

- Вставить пустое окно диаграммы.
- Загрузить окно диалога *Изменение ряда* (см. Рис.7.6), в котором в окне ввода *Значения*: ввести ссылку на итоговую строку в сводной таблице, содержащей итоговые значения товарооборота по каждой товарной группе.
- Загрузить окно диалога *Подписи оси* (см. Рис.7.7), в котором в окне ввода *Диапазон подписей оси*: можно указать ссылки на ячейки, в которых находятся наименования товарных групп.

В практическом задании для построения диаграммы, отражающей динамику продаж в течение рассматриваемого периода времени по дням, следует:

- Вставить пустое окно диаграммы.
- Загрузить окно диалога *Изменение ряда* (см. Рис.7.6), в котором в окне ввода *Значения*: ввести ссылку на итоговый столбец в сводной таблице, содержащий итоговые значения товарооборота по каждой дате.
- Загрузить окно диалога *Подписи оси* (см. Рис.7.7), в котором в окне ввода *Диапазон подписей оси*: можно указать ссылки на ячейки, в которых находятся даты продаж.

На вставленных диаграммах можно отформатировать различные элементы – *область диаграммы, область построения, подписи данных, заголовок диаграммы и др.* (см. *Форматирование сводной диаграммы*).

В результате будут построены две диаграммы, отражающие отдельные значения рядов из сводной таблицы. Если диаграмму построить на основе сводной таблицы, то на диаграмме отобразятся все значения полей сводной таблицы. Изменение макета сводной диаграммы можно выполнить или с помощью изменений в сводной таблице, или с помощью параметров окна диалога *Область фильтра сводной таблицы*, которая располагается справа в рабочей области пользователя.

### **С. Создание сводной таблицы**

Построить сводную таблицу для анализа товарооборота по дням недели в течение рассматриваемого периода времени. На основе полученной сводной таблицы построить диаграмму, отражающую товарооборот по дням недели.

- Установить табличный курсор в любую ячейку исходной базы данных *Продажи*.
- Выбрать вкладку *Вставка* → группу *Таблицы* → кнопку с раскрывающимся списком *Сводная таблица* → команду *Сводная таблица*. В результате табличный про-

цессор *Microsoft Excel* вставит в книгу новый рабочий лист, на котором будет пустой макет сводной таблицы.

- В область макета сводной таблицы *Названия строк* перетащить кнопку с названием поля базы данных День недели;
- В область макета сводной таблицы  $\Sigma$  *Значения* перетащить кнопку с названием поля базы данных Стоимость.

В результате макет сводной таблицы будет выглядеть следующим образом:

<b>Фильтр отчета</b>	<b>Названия столбцов</b>
<b>Названия строк</b> <i>День недели</i>	<b><math>\Sigma</math> Значения</b> <i>Сумма по полю Стоимость</i>

- Для поля сводной таблицы *Сумма по полю Стоимость* можно установить следующие параметры поля – в окне диалога *Параметры поля значений* (см. Рис.6.3) на вкладке *Операция* в списке операций выбрать операцию *Сумма*, в окне ввода *Пользовательское имя*: указать имя поля сводной таблицы *Стоимость* (добавить символ пробела до или после имени), с помощью кнопки *Числовой формат* выбрать числовой формат - *Денежный* (см. *Установка параметров полей сводной таблицы* и *Форматирование типов значений полей сводной таблицы*).
- Присвоить рабочему листу имя *Сводная\_Дни\_недели*.

### Построение диаграммы

Для построения сводной таблицы на основе сводной таблицы следует установить табличный курсор в любую ячейку сводной таблицы и далее выбрать вкладку *Вставка* → группу *Диаграммы* → выбрать тип диаграммы с помощью кнопок с раскрывающимся списком *Гистограмма, График, Круговая, Линейчатая* и др.

### D. Создание сводной таблицы

Построить сводную таблицу для анализа товарооборота товарных групп по неделям в течение рассматриваемого периода времени. На основе полученной сводной таблицы построить диаграмму, отражающую динамику недельных продаж. Осуществить расчет основных показателей торговой деятельности в разрезе товарных групп и в целом: абсолютные приросты товарооборота (базисный и цепной показатель); средний абсолютный прирост товарооборота за период; темпы прироста товарооборота (базисный и цепной показатель); средний темп прироста товарооборота за период.

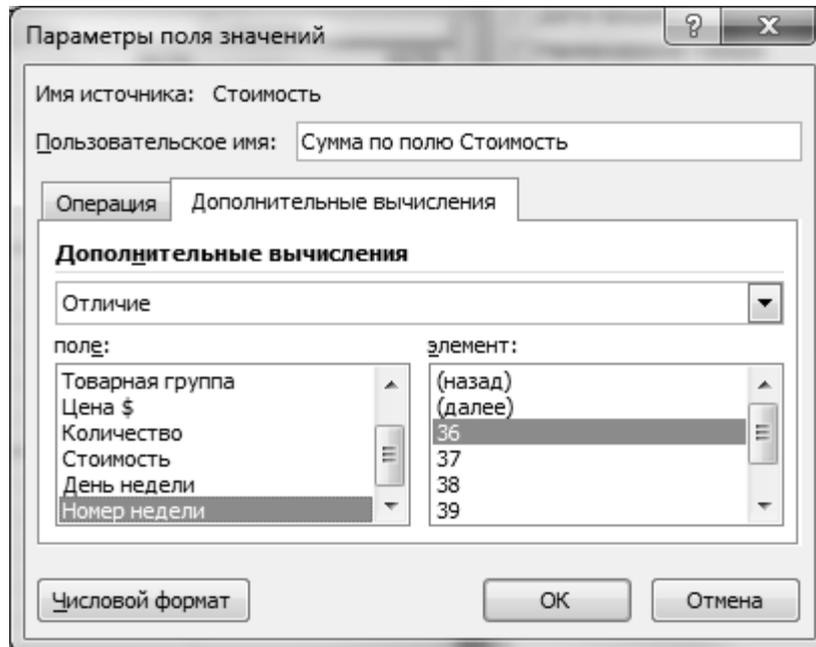
- Установить табличный курсор в любую ячейку исходной базы данных *Продажи*.
- Выбрать вкладку *Вставка* → группу *Таблицы* → кнопку с раскрывающимся списком *Сводная таблица* → команду *Сводная таблица*. В результате табличный процессор *Microsoft Excel* вставит в книгу новый рабочий лист, на котором будет пустой макет сводной таблицы.
- В область макета сводной таблицы *Названия строк* перетащить кнопку с названием поля базы данных Номер недели;
- В область макета сводной таблицы *Названия столбцов* перетащить кнопку с названием поля базы данных Товарная группа;
- В область макета сводной таблицы  $\Sigma$  *Значения* перетащить кнопку с названием поля базы данных Стоимость 5 раз.

В результате макет сводной таблицы будет выглядеть следующим образом:

Фильтр отчета	Названия столбцов
	<i>Товарная группа</i>
<b>Названия строк</b> <i>Дата продажи</i>	<b><math>\Sigma</math> Значения</b> <i>Сумма по полю Стоимость</i> <i>Сумма по полю Стоимость2</i> <i>Сумма по полю Стоимость3</i> <i>Сумма по полю Стоимость4</i> <i>Сумма по полю Стоимость5</i>

- Для первого поля сводной таблицы *Сумма по полю Стоимость* можно установить следующие параметры поля – в окне диалога *Параметры поля значений* (см. Рис.6.3) на вкладке *Операция* в списке операций выбрать операцию *Сумма*, в окне ввода *Пользовательское имя*: указать имя поля сводной таблицы *Стоимость* (добавить символ пробела до или после имени), с помощью кнопки *Числовой формат* выбрать числовой формат - *Денежный*.
- Для второго и третьего полей сводной таблицы *Сумма по полю Стоимость2* и *Сумма по полю Стоимость3* можно установить следующие параметры поля в окне диалога *Параметры поля значений* (см. Рис.6.3):
  - на вкладке *Дополнительные вычисления* в списке *Дополнительные вычисления* выбрать операцию *Отличие* (см. Рис.7.8);
  - в списке с прокруткой *поле*: выбрать название поля базы данных *Номер недели*;
  - в списке с прокруткой *элемент*: выбрать вариант 36 (первая неделя в списке недель), если следует вычислить *базисный абсолютный прирост*, и вариант (*назад*), если следует вычислить *цепной абсолютный прирост*;

- в окне ввода *Пользовательское имя*: указать имя поля сводной таблицы *Базисный абсолютный прирост* или *Цепной абсолютный прирост* соответственно;
- с помощью кнопки *Числовой формат* выбрать числовой формат *Денежный*, отрицательные числа красного цвета со знаком минус.



**Рис. 7.8** Окно диалога *Подписи оси*

- Для четвертого и пятого полей сводной таблицы *Сумма по полю Стоимость4* и *Сумма по полю Стоимость5* можно установить следующие параметры поля в окне диалога *Параметры поля значений* (см. Рис.6.3):
  - на вкладке *Дополнительные вычисления* в списке *Дополнительные вычисления* выбрать операцию *Приведенное отличие*;
  - в списке с прокруткой *поле*: выбрать название поля базы данных *Номер недели*;
  - в списке с прокруткой *элемент*: выбрать вариант 36 (первая неделя в списке недель), если следует вычислить *базисный темп прироста*, и вариант *(назад)*, если следует вычислить *цепной темп прироста*;
  - в окне ввода *Пользовательское имя*: указать имя поля сводной таблицы *Базисный темп прироста* или *Цепной темп прироста* соответственно;
  - с помощью кнопки *Числовой формат* выбрать числовой формат *Процентный*. Значения данного поля сводной таблицы могут получиться как положительные, так и отрицательные. И для отображения положительных и отрицательных чисел процентного формата можно применить специальную маску для форматирования числовых форматов. Для этого следует в раскрывшемся окне диалога *Формат ячеек* в списке *Числовые форматы*: выбрать вариант *(все форматы)* и далее справа в окне ввода *Тип*: задать следующую маску:

$$\underbrace{[\text{Синий}] + 0,0\%}_{\text{положительные значения}} ; \underbrace{[\text{Красный}] - 0,0\%}_{\text{отрицательные значения}} ; \underbrace{;;}_{\text{не печатаются нулевые значения}}$$

В результате в сводной таблице значения базисного и цепного темпа прироста будут отформатированы следующим образом:

- положительные значения – *процентный формат, целые числа синего цвета со знаком плюс*;
- отрицательные значения – *процентный формат, целые числа красного цвета со знаком минус*;
- нулевые значения – не печатаются.

– Присвоить рабочему листу имя *Сводная\_Недели*.

Подробное описание установки параметров полей сводной таблицы см. *Установка параметров полей сводной таблицы* и *Форматирование типов значений полей сводной таблицы*.

### Построение диаграммы

Для построения сводной диаграммы на основе сводной таблицы следует установить табличный курсор в любую ячейку сводной таблицы и далее выбрать вкладку *Вставка* → группу *Диаграммы* → выбрать тип диаграммы с помощью кнопок с раскрывающимся списком *Гистограмма, График, Круговая, Линейчатая* и др.

### Е. Создание сводной таблицы

Построить сводную таблицу для анализа физического объема недельных продаж отдельных товаров различных групп в течение рассматриваемого периода времени. На основе полученной сводной таблицы построить диаграмму.

- Установить табличный курсор в любую ячейку исходной базы данных *Продажи*.
- Выбрать вкладку *Вставка* → группу *Таблицы* → кнопку с раскрывающимся списком *Сводная таблица* → команду *Сводная таблица*. В результате табличный процессор *Microsoft Excel* вставит в книгу новый рабочий лист, на котором будет пустой макет сводной таблицы.
- В область макета сводной таблицы *Названия строк* перетащить кнопку с названием поля базы данных 

<i>Товарная группа</i>
------------------------

 и далее кнопку с названием поля базы данных 

<i>Наименование товара</i>
----------------------------

;
- В область макета сводной таблицы *Названия столбцов* перетащить кнопку с названием поля базы данных 

<i>Номер недели</i>
---------------------

;

- В область макета сводной таблицы  $\Sigma$  *Значения* перетащить кнопку с названием поля базы данных Количество.

В результате макет сводной таблицы будет выглядеть следующим образом:

Фильтр отчета	Названия столбцов
	<i>Номер недели</i>
Названия строк	$\Sigma$ Значения
<i>Товарная группа</i> <i>Наименование товара</i>	<i>Сумма по полю Количество</i>

- Для поля сводной таблицы *Сумма по полю Количество* можно установить следующие параметры поля – в окне диалога *Параметры поля значений* (см. Рис.6.3) на вкладке *Операция* в списке операций выбрать операцию *Сумма*, в окне ввода *Пользовательское имя*: указать имя поля сводной таблицы *Количество* (добавить символ пробела до или после имени), с помощью кнопки *Числовой формат* выбрать числовой формат - *Числовой* (см. *Установка параметров полей сводной таблицы* и *Форматирование типов значений полей сводной таблицы*).
- Присвоить рабочему листу имя *Сводная\_Товары\_по\_неделям*.

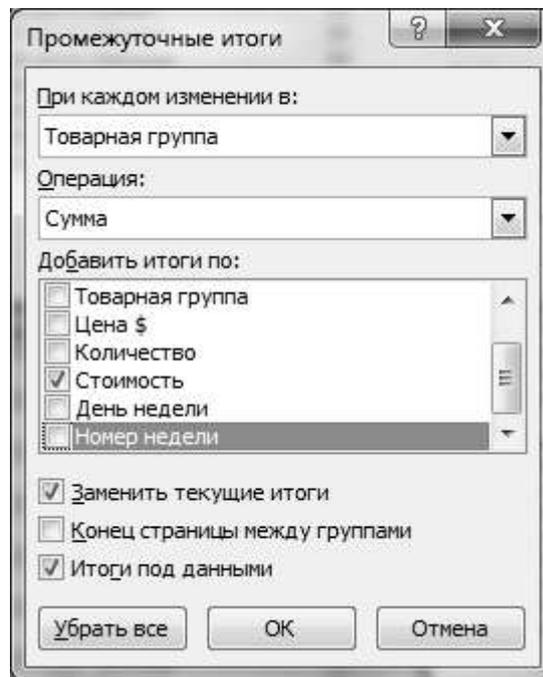
### Построение диаграммы

Для построения сводной диаграммы на основе сводной таблицы следует установить табличный курсор в любую ячейку сводной таблицы и далее выбрать вкладку *Вставка* → группу *Диаграммы* → выбрать тип диаграммы с помощью кнопок с раскрывающимся списком *Гистограмма, График, Круговая, Линейчатая* и др.

### Е. Анализ продаж с использованием режима *Данные* → *Итоги*

- Снять с базы данных *Продажи* статус базы данных с помощью вкладки *Конструктор* → группа *Сервис* → кнопка *Преобразовать в диапазон*.
- Отсортировать базу данных *Продажи* по полю *Товарная группа* в любом направлении с помощью вкладки *Данные* → группа *Сортировка и фильтр* → кнопка  *Сортировка по возрастанию* или кнопка  *Сортировка по убыванию*.
- Перейти в режим подведения промежуточных итогов - вкладка *Данные* → группа *Структура* → кнопка *Промежуточные итоги*. В результате загрузится окно диалога *Промежуточные итоги* (см. Рис.7.9), в котором в раскрывающемся списке *При каждом изменении в:* выбрать название поля *Товарная группа*, так как по нему была упорядочена исходная база данных. Далее в раскрывающемся списке *Операция:* следует выбрать нужную операцию для подведения итогов, например операцию *Сумма*. Затем в группе флажков *Добавить итоги по:* отме-

тить те поля, по которым следует подвести промежуточные итоги, например, поле *Стоимость*.



**Рис. 7.9** Окно диалога *Промежуточные итоги*

В результате табличный процессор *Microsoft Excel* преобразует исходную базу данных в базу данных с итогами в указанных полях по каждой товарной группе и на рабочем листе будет отражена структура итогов в следующем виде (см. Рис.7.10).

	А	В	С	Д	Е	Ф	Г	Н
	Дата продажи	Наименование товара	Товарная группа	Цена \$	Количество	Стоимость	День недели	Номер недели
23								
38			Мониторы Итог		30	5598		
50			Принтеры Итог		18	4462		
58			Сканеры Итог		10	3230		
57	31.01.2010	MOTOROLA 288	Факс-модемы	166	1	166	Воскресенье	5
58	03.02.2010	MOTOROLA 288	Факс-модемы	166	1	166	Среда	6
59	04.02.2010	ZOOM 56K Int O	Факс-модемы	254	3	762	Четверг	6
60	05.02.2010	US Robotics Cou	Факс-модемы	195	2	390	Пятница	6
61	08.02.2010	US Robotics Spo	Факс-модемы	85	2	170	Понедельник	7
62	10.02.2010	MOTOROLA 288	Факс-модемы	166	2	312	Среда	7
63	11.02.2010	ZOOM 56K Int O	Факс-модемы	254	1	254	Четверг	7
64	12.02.2010	US Robotics Spo	Факс-модемы	85	1	85	Пятница	7
65	14.02.2010	US Robotics Cou	Факс-модемы	195	1	195	Воскресенье	7
66	17.02.2010	US Robotics Spo	Факс-модемы	85	3	255	Среда	8
67			Факс-модемы Итог		17	2735		
68			Общий итог		75	16025		
69								
70								

**Рис. 7.10** Результаты применения режима *Промежуточные итоги*

В левом верхнем углу рабочего листа будет отображена группа кнопок по управлению структурой итогов базы данных –  1  2  3, где:

- 1 – общие итоги по всей базе данных;
- 2 – общие итоги по всем товарным группам;
- 3 – расшифровка итогов по каждой товарной группе.

С помощью кнопок сворачивания  – и кнопок разворачивания  + итогов можно управлять итогами по каждой отдельной товарной группе.

Для того, чтобы убрать итоги с рабочего листа следует в окне диалога *Промежуточные итоги* следует выбрать кнопку . В результате табличный процессор *Microsoft Excel* уберет с рабочего листа промежуточные итоги, удалит структуру и вернет базу данных в обычный вид.

### *Анализ продаж в торговой сети*

Известны данные о продажах товаров в магазинах торговой сети со следующей структурой:

Месяц	Торговая точка	Наименование товара	Объем продаж (ед.)	Товарооборот (руб.)
...	...	...	...	...

На основе исходных данных построить следующие сводные таблицы для анализа продаж:

#### Вариант 1

Фильтр отчета <i>Торговая точка</i>	Названия столбцов
Названия строк <i>Наименование товара</i>	Σ Значения – Минимальный товарооборот – Средний товарооборот – Максимальный товарооборот

#### Вариант 2

Фильтр отчета <i>Наименование товара</i>	Названия столбцов
Названия строк <i>Торговая точка</i>	Σ Значения – Минимальный товарооборот – Средний товарооборот – Максимальный товарооборот

**Вариант 3**

<b>Фильтр отчета</b> <i>Месяц</i>	<b>Названия столбцов</b>
<b>Названия строк</b> <i>Торговая точка</i>	<b>Σ Значения</b> – Минимальный товарооборот – Средний товарооборот – Максимальный товарооборот

**Вариант 4**

<b>Фильтр отчета</b> <i>Торговая точка</i>	<b>Названия столбцов</b>
<b>Названия строк</b> <i>Наименование товара</i>	<b>Σ Значения</b> – Суммарный товарооборот – Средний товарооборот – Среднеквадратическое отклонение

**Вариант 5**

<b>Фильтр отчета</b> <i>Наименование товара</i>	<b>Названия столбцов</b>
<b>Названия строк</b> <i>Торговая точка</i>	<b>Σ Значения</b> – Суммарный товарооборот – Средний товарооборот – Среднеквадратическое отклонение

**Вариант 6**

<b>Фильтр отчета</b> <i>Месяц</i>	<b>Названия столбцов</b>
<b>Названия строк</b> <i>Торговая точка</i>	<b>Σ Значения</b> – Суммарный товарооборот – Средний товарооборот – Среднеквадратическое отклонение

**Вариант 7**

<b>Фильтр отчета</b> <i>Торговая точка</i>	<b>Названия столбцов</b> <i>Месяц</i>
<b>Названия строк</b> <i>Наименование товара</i>	<b>Σ Значения</b> – Суммарный товарооборот – Доля в товарообороте торговой точки – Доля от общего товарооборота за период

**Вариант 8**

<b>Фильтр отчета</b> <i>Наименование товара</i>	<b>Названия столбцов</b> <i>Месяц</i>
<b>Названия строк</b> <i>Торговая точка</i>	<b>Σ Значения</b> – Суммарный товарооборот – Доля в товарообороте сети – Доля от общего товарооборота за период

**Вариант 9**

<b>Фильтр отчета</b> <i>Месяц</i>	<b>Названия столбцов</b> <i>Торговая точка</i>
<b>Названия строк</b> <i>Наименование товара</i>	<b>Σ Значения</b> – Суммарный товарооборот – Доля в товарообороте торговой точки – Доля от общего товарооборота по торговой сети

**Вариант 10**

<b>Фильтр отчета</b> <i>Наименование товара</i>	<b>Названия столбцов</b> <i>Месяц</i>
<b>Названия строк</b> <i>Торговая точка</i>	<b>Σ Значения</b> – Суммарный товарооборот – Цепной абсолютный прирост товарооборота по месяцам – Цепной темп прироста товарооборота по месяцам

**Вариант 11**

<b>Фильтр отчета</b> <i>Торговая точка</i>	<b>Названия столбцов</b> <i>Месяц</i>
<b>Названия строк</b> <i>Наименование товара</i>	<b>Σ Значения</b> – Суммарный товарооборот – Цепной абсолютный прирост товарооборота по месяцам – Цепной темп прироста товарооборота по месяцам

**Вариант 12**

<b>Фильтр отчета</b> <i>Торговая точка</i>	<b>Названия столбцов</b> <i>Месяц</i>
<b>Названия строк</b> <i>Наименование товара</i>	<b>Σ Значения</b> – Суммарный товарооборот – Базисный (относительно первого месяца) абсолютный прирост товарооборота по месяцам – Базисный (относительно первого месяца) темп прироста товарооборота по месяцам

**Вариант 13**

<b>Фильтр отчета</b> <i>Наименование товара</i>	<b>Названия столбцов</b> <i>Месяц</i>
<b>Названия строк</b> <i>Торговая точка</i>	<b>Σ Значения</b> – Суммарный товарооборот – Базисный (относительно первого месяца) абсолютный прирост товарооборота по месяцам – Базисный (относительно первого месяца) темп прироста товарооборота по месяцам

**Вариант 14**

<b>Фильтр отчета</b>	<b>Названия столбцов</b> <i>Месяц</i>
<b>Названия строк</b> <i>Торговая точка</i> <i>Наименование товара</i>	<b>Σ Значения</b> – Суммарный товарооборот – Цепной абсолютный прирост товарооборота по месяцам – Цепной темп прироста товарооборота по месяцам

**Создание сводной таблицы**

- Определить границы таблицы с исходными данными и присвоить ей статус базы данных (вкладка *Вставка* → группа *Таблицы* → кнопка *Таблица*).
- Присвоить таблице с исходными данными пользовательское имя *Продажи* (вкладка *Формулы* → группа *Определенные имена* → кнопка *Присвоить имя...*).
- Выбрать вкладку *Вставка* → группу *Таблицы* → кнопку с раскрывающимся списком *Сводная таблица* → команду *Сводная таблица*. В результате табличный процессор *Microsoft Excel* вставит в книгу новый рабочий лист, на котором будет пустой макет сводной таблицы.
- В область макета сводной таблицы *Фильтр отчета*, *Названия строк*, *Названия столбцов*, *Σ Значения* перетащить кнопки с названиями нужных полей базы данных, определяя макет сводной таблицы.
- Для полей сводной таблицы, перемещаемых в область *Σ Значения* можно установить следующие параметры поля – в окне диалога *Параметры поля значений* (см. Рис.6.3) на вкладке *Операция* в списке операций выбрать нужную операцию, в окне ввода *Пользовательское имя*: указать нужное имя поля сводной таблицы, с помощью кнопки *Числовой формат* выбрать нужный формат представления числового формата.

При создании макета сводной таблицы для полей сводной таблицы можно задать следующие имена и выбрать следующие операции:

Имя поля сводной таблицы	Операция
Минимальный товарооборот: $\min(x_1, x_2, \dots, x_n)$	Операция <i>Минимум</i>
Средний товарооборот: $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$	Операция <i>Среднее</i>
Максимальный товарооборот: $\max(x_1, x_2, \dots, x_n)$	Операция <i>Максимум</i>
Среднеквадратическое отклонение (для генеральной совокупности): $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$ Среднеквадратическое отклонение (для выборки): $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$	Операция <i>Несмещенное отклонение</i> (для генеральной совокупности)  Операция <i>Смещенное отклонение</i> (для выборки)
Доля...	Операции: <i>Доля</i> <i>Доля от суммы по строке</i> <i>Доля от суммы по столбцу</i> <i>Доля от общей суммы</i>
Базисный (относительно первого месяца) абсолютный прирост: $\Delta_t^B = x_t - x_B,$ для $t = 2, 3, \dots, n$ , где $x_B = x_1$	Операция <i>Отличие</i> Далее в списке с прокруткой <i>поле</i> : выбрать название поля <i>Месяц</i> , а в списке с прокруткой <i>элемент</i> : выбрать вариант ( <i>январь</i> ), так как при вычислении базисного абсолютного прироста сравнивается значение текущего периода со значением базисного периода (обычно это значение первого элемента ряда).

Имя поля сводной таблицы	Операция
Цепной абсолютный прирост: $\Delta_t^Ц = x_t - x_{t-1}$ для $t = 2, 3, \dots, n$	Операция <i>Отличие</i> Далее в списке с прокруткой <i>поле</i> : выбрать название поля <i>Месяц</i> , а в списке с прокруткой <i>элемент</i> : выбрать вариант ( <i>назад</i> ), так как при вычислении цепного абсолютного прироста сравнивается значение текущего периода со значением предыдущего периода.
Базисный (относительно первого месяца) темп прироста: $T_{np_t}^Б = \frac{x_t - x_Б}{x_Б} \cdot 100\%$ для $t = 2, 3, \dots, n$	Операция <i>Приведенное отличие</i> Далее в списке с прокруткой <i>поле</i> : выбрать название поля <i>Месяц</i> , а в списке с прокруткой <i>элемент</i> : выбрать вариант ( <i>январь</i> ), так как при вычислении базисного темпа прироста сравнивается значение текущего периода со значением базисного периода (обычно это значение первого элемента ряда).
Цепной темп прироста: $T_{np_t}^Ц = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} \cdot 100\%$ для $t = 2, 3, \dots, n$	Операция <i>Приведенное отличие</i> Далее в списке с прокруткой <i>поле</i> : выбрать название поля <i>Месяц</i> , а в списке с прокруткой <i>элемент</i> : выбрать вариант ( <i>назад</i> ), так как при вычислении цепного темпа прироста сравнивается значение текущего периода со значением предыдущего периода.

Для удобства восприятия числовых данных в ячейках таблицы можно применить маску для форматирования чисел. Для этого следует в окне диалога *Формат ячеек* в списке *Числовые форматы*: выбрать вариант (*все форматы*) и далее в окне ввода *Тип*: задать маски:

$$\underbrace{[\text{Синий}] +\# \#\#0,0}_{\text{положительные значения}} ; \underbrace{[\text{Красный}] -\# \#\#0,0}_{\text{отрицательные значения}} ; \underbrace{; ;}_{\text{не печатаются нулевые значения}}$$

$$\underbrace{[\text{Синий}] +0,0\%}_{\text{положительные значения}} ; \underbrace{[\text{Красный}] -0,0\%}_{\text{отрицательные значения}} ; \underbrace{; ;}_{\text{не печатаются нулевые значения}}$$

$$\underbrace{[\text{Синий}] +\# \#\# 0,00 \text{ р.}}_{\text{положительные значения}} ; \underbrace{[\text{Красный}] -\# \#\# 0,00 \text{ р.}}_{\text{отрицательные значения}} ; \underbrace{; ;}_{\text{не печатаются нулевые значения}}$$

### Структурный ABC-анализ продаж

Известны объемы продаж товаров и товарооборота по датам за месяц в Таблице №1 и остатки товаров на конец периода в Таблице №2.

**Таблица №1. Продажи товаров за месяц**

Дата	№ документа	Код товара	Объем продаж	Стоимость продаж
...	...	...	...	...

**Таблица №2. Остатки товаров на конец месяца**

Код товара	Остаток на конец периода	Цена закупки
...	...	...

**Задание А.** Требуется построить сводную таблицу, отражающую продажи товаров по датам. Далее сгруппировать объемы продаж по неделям и для каждого товара посчитать следующие статистические показатели:

- средний объем продаж;
- отклонение от среднего объема продаж;
- доверительный интервал;
- объем закупки на неделю;
- обеспеченность запасами (дни);
- стоимость закупки.

**Задание В.** Для каждого товара следует рассчитать следующие финансовые показатели:

- среднюю цену реализации товара;
- % наценки;
- валовую маржу;
- % валовой маржи.

**Задание С.** Осуществить ABC – анализ товарного ассортимента по результатам продаж за период.

### Выполнение заданий

**Задание А.**

- Определить границы таблиц с исходными данными и присвоить им статус баз данных (вкладка *Вставка* → группа *Таблицы* → кнопка *Таблица*).

- Присвоить Таблице №1 с исходными данными пользовательское имя *Продажи* (вкладка *Формулы* → группа *Определенные имена* → кнопка *Присвоить имя...*).
- Присвоить Таблице №2 с исходными данными пользовательское имя *Остатки* (вкладка *Формулы* → группа *Определенные имена* → кнопка *Присвоить имя...*).
- На основе базы данных *Продажи* построить сводную таблицу, отражающую объемы продаж для каждого товара по датам. Выбрать вкладку *Вставка* → группу *Таблицы* → кнопку с раскрывающимся списком *Сводная таблица* → команду *Сводная таблица*. В результате табличный процессор *Microsoft Excel* вставит в книгу новый рабочий лист, на котором будет пустой макет сводной таблицы.
- В область макета сводной таблицы *Названия строк* перетащить кнопку с названием поля базы данных 

<i>Код товара</i>
-------------------

 ;
- В область макета сводной таблицы *Названия столбцов* перетащить кнопку с названием поля базы данных 

<i>Дата</i>
-------------

 ;
- В область макета сводной таблицы  $\Sigma$  *Значения* перетащить кнопку с названием поля базы данных 

<i>Объем продаж</i>
---------------------

 .

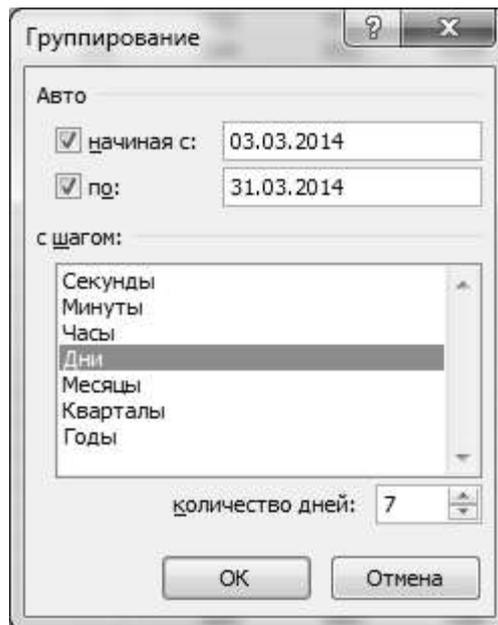
В результате макет сводной таблицы будет выглядеть следующим образом:

<b>Фильтр отчета</b>	<b>Названия столбцов</b>
	<i>Дата</i>
<b>Названия строк</b>	<b><math>\Sigma</math> Значения</b>
<i>Код товара</i>	<i>Сумма по полю Объем продаж</i>

- Для поля сводной таблицы *Сумма по полю Объем продаж* можно установить следующие параметры поля – в окне диалога *Параметры поля значений* (см. Рис.6.3) на вкладке *Операция* в списке операций выбрать операцию *Сумма*, в окне ввода *Пользовательское имя*: указать имя поля сводной таблицы *Объем продаж* (добавить символ пробела до или после имени), с помощью кнопки *Числовой формат* выбрать числовой формат *Числовой*,  *разделитель групп разрядов* (см. *Установка параметров полей сводной таблицы* и *Форматирование типов значений полей сводной таблицы*).
- В построенной сводной таблице удалить итоги по строкам и столбцам. Для чего вызвать *Параметры сводной таблицы* и далее в раскрывшемся окне диалога *Параметры сводной таблицы* на вкладке *Итоги и фильтры* (см. Рис.6.6) следует снять флажки  *Показывать общие итоги для строк* и  *Показывать общие итоги для столбцов*.
- Далее необходимо выполнить группировку данных, полученных в сводной таблице по неделям. Для чего следует предварительно установить табличный курсор в

любую ячейку названий столбцов сводной таблицы, в которой находится дата и далее:

- или выбрать вкладку *Данные* → группу *Структура* → кнопку с раскрывающимся списком *Группировать* → команду *Группировать...*
- или вызвать контекстное меню к любой ячейке названия столбцов сводной таблицы, в которой находится дата, в котором выбрать команду *Группировать...*



**Рис. 7.11** Окно диалога *Группирование*

В раскрывшемся окне диалога *Группирование* (см. Рис.7.11) в списке с прокруткой *с шагом:* следует выбрать вариант *Дни*, а в окне счетчика *количество дней:* установить количество 7 дней. При необходимости можно поменять начальную и конечную даты, которые определяются автоматически на основе исходной таблицы данных *Продажи*.

В результате должна получиться следующая таблица, например:

<b>Код товара</b>	<b>03.03.2014 - 09.03.2014</b>	<b>10.03.2014 - 16.03.2014</b>	<b>17.03.2014 - 13.03.2014</b>	...
<b>101</b>				
...	...	...	...	...
<b>151</b>				

– Присвоить рабочему листу имя *Сводная\_Товары\_по\_неделям*.

Справа от сводной таблицы следует добавить таблицу для вычисления для каждого товара следующих статистических показателей:

Средний объем продаж	Среднее квадратическое отклонение	Доверительный интервал	Остаток	Объем закупки на неделю	Обеспеченность запасами (дни)	Стоимость закупки
...	...	...	...	...	...	...

- *Средний объем продаж* – функция *СРЗНАЧ(...)* из категории *Статистические*, возвращает среднее арифметическое своих аргументов. В качестве аргумента функции указать объемы продаж за сгруппированные недели.
- *Среднее квадратическое отклонение* – функция *СТАНДОТКЛОН(...)* из категории *Статистические*. Стандартное отклонение — это мера того, насколько широко разбросаны точки данных относительно их среднего значения. В качестве аргумента функции указать объемы продаж за сгруппированные недели.
- *Доверительный интервал* – функция *ДОВЕРИТ(...)* из категории *Статистические*, возвращает значение, с помощью которого можно определить доверительный интервал для математического ожидания генеральной совокупности. Доверительный интервал представляет собой диапазон значений. Выборочное среднее  $\bar{x}$  является серединой этого диапазона, следовательно, доверительный интервал определяется как  $(\bar{x} \pm \text{ДОВЕРИТ})$ . Значение доверительной вероятности принять равным 90% ( $\alpha = 0,1$ ).

Аргументы функции *ДОВЕРИТ(...)*:

- Альфа* – это уровень значимости, используемый для вычисления уровня надежности. Уровень надежности равняется  $100 \cdot (1 - \alpha) \%$ ;
- Станд\_откл* – это стандартное отклонение генеральной совокупности;
- Размер* – это размер выборки, который можно посчитать с помощью функции *СЧЁТЗ(...)* из категории *Статистические*. Данная функция подсчитывает количество значений в списке аргументов. В частном случае это количество недель.
- *Остаток* товара на конец периода следует взять из исходной таблицы данных *Остатки* с помощью функции *ВПР(...)* из категории *Ссылки и массивы*. Данная функция выполняет вертикальный поиск в первом столбце таблицы и возвращает значение из найденной строки и указанного столбца таблицы.

Аргументы функции *ВПР(...)*:

- искомое\_значение* – это значение, которое должно быть найдено в первом столбце базы данных *Остатки* - это код товара;
- таблица* – таблица с информацией, в которой ищется искомое значение - это база данных *Остатки*;
- номер\_столбца* – это номер столбца *Остаток на конец периода* в базе данных *Остатки*, из которого выбирается искомое значение – это номер столбца 2;
- интервал\_просмотра* – это логическое значение, которое определяет, как табличный процессор *Microsoft Excel* ищет искомое значение в первом столбце таблицы:
  - 1 – если первый столбец таблицы отсортирован в порядке убывания значений,
  - 1 – если первый столбец таблицы отсортирован в порядке возрастания значений,
  - 0 – если первый столбец таблицы не отсортирован.

Данные в базе данных *Остатки* отсортированы в порядке возрастания, поэтому следует указать значение 1.

- *Объем закупки на неделю* вычислить по формуле:

$$\text{Объем закупки} = \frac{\text{Средний объем продаж}}{\text{Доверительный интервал}} - \text{Остаток}$$

- *Обеспеченность запасами* – обеспеченность продаж запасами товаров на неделю (в днях) вычислить по формуле:

$$\text{Обеспеченность запасами} = \frac{\text{Остаток}}{\text{Средний объем продаж}} \times 7 \text{ дней}$$

- *Стоимость закупки* товаров вычислить по формуле:

$$\text{Стоимость закупки} = \text{Объем закупки} \times \text{Цена закупки}$$

В данной формуле *Цену закупки* следует взять из 3-го столбца *Цена закупки* исходной базы данных *Остатки* с помощью функции *ВПР(...)* из категории *Ссылки и массивы* (см. описание выше).

Рассмотренные выше расчеты статистических показателей следует получить для каждого товара, находящегося в сводной таблице. Для этого следует записать формулы для первого товара, находящегося в сводной таблице, и далее с помощью маркера заполнения по смежным ячейкам скопировать формулы вниз для всех товаров.

**Задание В.**

Для каждого товара рассчитать следующие финансовые показатели - среднюю цену реализации товара, % наценки, валовую маржу, % валовой маржи.

- На основе базы данных *Продажи* построить сводную таблицу, отражающую объемы продаж и товарооборот для каждого товара за весь период. Выбрать вкладку *Вставка* → группу *Таблицы* → кнопку с раскрывающимся списком *Сводная таблица* → команду *Сводная таблица*. В результате табличный процессор *Microsoft Excel* вставит в книгу новый рабочий лист, на котором будет пустой макет сводной таблицы.
- В область макета сводной таблицы *Названия строк* перетащить кнопку с названием поля базы данных Код товара ;
- В область макета сводной таблицы *Σ Значения* перетащить кнопку с названием поля базы данных Стоимость продаж .
- В область макета сводной таблицы *Σ Значения* перетащить кнопку с названием поля базы данных Объем продаж .

В результате макет сводной таблицы будет выглядеть следующим образом:

Фильтр отчета	Названия столбцов
<b>Названия строк</b> <i>Код товара</i>	<b>Σ Значения</b> <i>Сумма по полю Стоимость продаж</i> <i>Сумма по полю Объем продаж</i>

- Для поля сводной таблицы *Сумма по полю Стоимость продаж* можно установить следующие параметры поля – в окне диалога *Параметры поля значений* (см. Рис.6.3) на вкладке *Операция* в списке операций выбрать операцию *Сумма*, в окне ввода *Пользовательское имя*: указать имя поля сводной таблицы *Стоимость продаж* (добавить символ пробела до или после имени), с помощью кнопки *Числовой формат* выбрать числовой формат - *Денежный*.
- Для поля сводной таблицы *Сумма по полю Объем продаж* можно установить следующие параметры поля – в окне диалога *Параметры поля значений* (см. Рис.6.3) на вкладке *Операция* в списке операций выбрать операцию *Сумма*, в окне ввода *Пользовательское имя*: указать имя поля сводной таблицы *Объем продаж* (добавить символ пробела до или после имени), с помощью кнопки *Числовой формат* выбрать числовой формат - *Числовой с разделителем групп разрядов*.
- Средняя цена реализации товара определяется через вычисляемое поле – вкладка *Параметры* → группа *Сервис* → кнопка с раскрывающимся списком *Формулы* →

команда *Вычисляемое поле...* В раскрывшемся окне диалога *Вставка вычисляемого поля* (см. Рис.6.5) в окне ввода *Имя:* следует ввести имя вычисляемого поля *Средняя цена реализации* и в окне *Формула:* следует ввести формулу для вычисления поля сводной таблицы:

$$\text{Средняя цена реализации} = \frac{\text{Товарооборот}}{\text{Объем продаж}}$$

В результате *Microsoft Excel* вставит в сводную таблицу вычисляемое поле *Сумма по полю Средняя цена реализации*, для которого можно установить следующие параметры поля – в окне диалога *Параметры поля значений* (см. Рис.6.3) на вкладке *Операция* в окне ввода *Пользовательское имя:* указать имя поля сводной таблицы *Средняя цена реализации* (добавить символ пробела до или после имени), с помощью кнопки *Числовой формат* выбрать числовой формат - *Денежный*.

Далее, справа от сводной таблицы следует добавить таблицу для вычисления для каждого товара следующих финансовых показателей:

<b>% наценки</b>	<b>Валовая маржа</b>	<b>% валовой маржи</b>
...	...	...

– *% наценки* - вычислить по формуле:

$$\% \text{ наценки} = \frac{\text{Средняя цена реализации}}{\text{Цена закупки}} - 1.$$

В данной формуле *Цену закупки* следует взять из третьего столбца *Цена закупки* исходной базы данных *Остатки* с помощью функции *ВПР(...)* из категории *Ссылки и массивы* (см. описание выше).

– *Валовая маржа* - вычислить по формуле:

$$\text{Валовая маржа} = (\text{Средняя цена реализации} - \text{Цена закупки}) \times \text{Объем продаж}$$

В данной формуле *Цену закупки* следует взять из третьего столбца *Цена закупки* исходной базы данных *Остатки* с помощью функции *ВПР(...)* из категории *Ссылки и массивы* (см. описание выше).

– *% валовой маржи* - вычислить по формуле:

$$\% \text{ Валовой маржи} = \frac{\% \text{ Наценки}}{1 + \% \text{ Наценки}}$$

Рассмотренные выше расчеты финансовых показателей следует получить для каждого товара, находящегося в сводной таблице. Для этого следует записать формулы для первого товара, находящегося в сводной таблице, и далее с помощью маркера заполнения по смежным ячейкам скопировать формулы вниз для всех товаров.

**Задание С.**

Осуществить ABC – анализ товарного ассортимента по результатам продаж за период.

- На основе базы данных *Продажи* построить сводную таблицу, отражающую долю продаж каждого товара в общем товарообороте. Выбрать вкладку *Вставка* → группу *Таблицы* → кнопку с раскрывающимся списком *Сводная таблица* → команду *Сводная таблица*. В результате табличный процессор *Microsoft Excel* вставит в книгу новый рабочий лист, на котором будет пустой макет сводной таблицы.
- В область макета сводной таблицы *Названия строк* перетащить кнопку с названием поля базы данных Код товара ;
- В область макета сводной таблицы  $\Sigma$  *Значения* перетащить кнопку с названием поля базы данных Стоимость продаж 2 раза.

В результате макет сводной таблицы будет выглядеть следующим образом:

Фильтр отчета	Названия столбцов
<b>Названия строк</b> <i>Код товара</i>	<b><math>\Sigma</math> Значения</b> <i>Сумма по полю Стоимость продаж</i> <i>Сумма по полю Стоимость продаж2</i>

- Для поля сводной таблицы *Сумма по полю Стоимость продаж* можно установить следующие параметры поля – в окне диалога *Параметры поля значений* (см. Рис.6.3) на вкладке *Операция* в списке операций выбрать операцию *Сумма*, в окне ввода *Пользовательское имя:* указать имя поля сводной таблицы *Стоимость продаж* (добавить символ пробела до или после имени), с помощью кнопки *Числовой формат* выбрать числовой формат - *Денежный*.
- Для поля сводной таблицы *Сумма по полю Стоимость продаж2* можно установить следующие параметры поля – в окне диалога *Параметры поля значений* (см. Рис.6.3) на вкладке *Дополнительные вычисления* в списке операций выбрать операцию *Доля от суммы по столбцу*, в окне ввода *Пользовательское имя:* указать имя поля сводной таблицы *Доля в товарообороте*, с помощью кнопки *Числовой формат* выбрать числовой формат - *Процентный*.
- Отсортировать полученную сводную таблицу по убыванию значений поля *Товарооборот* с помощью вкладки *Данные* → группа *Сортировка и фильтр* → кнопка  *Сортировка по возрастанию* или кнопка  *Сортировка по убыванию*.
- Посчитать накопленную долю продаж по товарам.

- Посчитать накопленную долю позиций товаров в общем товарном ассортименте.
- Построить *точечную* диаграмму:
  - *Массив X* — накопленные доли позиций в товарном ассортименте,
  - *Массив Y* — накопленные доли продаж товаров в общем товарообороте.
- Построить столбец, определяющий к какой группе товаров «А», «В» или «С» относится каждый из товаров.

Результаты вычислений для каждого товара, представить в следующей таблице:

<b>Накопленная доля продаж в ТО в %</b>	<b>Номер позиции</b>	<b>Накопленная доля позиций в ТО</b>	<b>ABC - анализ</b>
...	...	...	...

## Список литературы

1. Афанасьев М. Ю., Багриновский К. А., Матюшок В. М. Прикладные задачи исследования операций: Учебное пособие. – М.: Инфра-М, 2011. – 352 с.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000 г. – 624 с.: ил.
3. Вагнер Г. Основы исследования операций. – М.: Мир, 1972, 1973. – т. 1-3.
4. Вентцель Е. С. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 2007. – 208 с.
5. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. Учебник для вузов. – СПб: Лань, 2009. – 672 с.
6. Демидович, Б. П. Краткий курс высшей математики: учеб. Пособие для вузов / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев. – М.: АСТ: Астрель, 2005. – 654 с.: ил.
7. Количественные методы и инструментальные средства в экономике и торговле. Монография / Под ред. В. Г. Степанова. – Тула: Издательство «Эконом», 2013.
8. Красс М. С. Математика в экономике. Основы математики: Учебник. – М.: ИД ФБК-ПРЕСС, 2005. – 472 с.
9. Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н. Исследование операций в экономике: Учебное пособие, 2-е издание / под редакцией профессора Н. Ш. Кремера. – М.: Юрайт, 2012. – 432 с.
10. Майкл Мескон, Майкл Альберт, Франклин Хедоури. Основы менеджмента. – М.: Дело, 2006. – 720 с.
11. Материалы исследований и разработок **INFORT Group** [Электронный ресурс], URL: <http://www.infort-group.ru>.
12. Статистика: учебник / под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Высшее образование, 2008. – 566 с.
13. Степанов В. Г. Информационные технологии управления в торговле: алгоритмы и методы решения задач на компьютере. Язык программирования ALLite. Монография. – Тула: Издательство «Эконом», 2013.
14. Степанов В. Г. Информационные технологии управления продажами и маркетингом. // Издательство LAP LAMBERT Academic Publishing, AV Akademikerverlag GmbH&Co. KG, Saarbruken, Deutschland, 2013.
15. Степанов В. Г. Математическая теория массового обслуживания /Экономический анализ: ситуации, тесты, примеры, задачи, выбор оптимальных управленческих решений, финансовое прогнозирование. Учебное пособие. Под

редакцией Баканова М. И., Шеремета А. Д. (Гриф Минвуза РФ) – М.: Финансы и статистика, 1999 – с. 62-78.

16. Степанов В. Г. Модели и методы оптимального планирования ассортимента и товарооборота. // Теория и практика современной торговли. Часть 2. [Текст]: Сборник научных работ / Под ред. д.э.н., проф. В. И. Зудина. – Тула: Тульский филиал РГТЭУ, 2009. – с. 204-221.
17. Степанов В. Г. Модели и технологии последовательного управления продвижением. // Издательство LAP LAMBERT Academic Publishing, OmniScriptum GmbH&Co. KG, Saarbruken, Deutschland, 2014.
18. Степанов В. Г. Основы информационных технологий управления бизнес-процессами. // Издательство LAP LAMBERT Academic Publishing, AV Akademikerverlag GmbH&Co. KG, Saarbruken, Deutschland, 2013.
19. Степанов В. Г. Управление продажами: анализ и планирование ассортимента. / В. Г. Степанов // Сборник научных трудов Тульского филиала РГТЭУ «Экономика России: теория и практика». – Тула: ИПП «Гриф и К», 2004. – с.110-121.
20. Степанов В. Г., Степанова Т. В. Информационные технологии управления продажами и товарными запасами в торговых сетях. // Теория и практика современной торговли: Сборник научных трудов/Под ред. д.э.н., проф. В. И. Зудина. – Тула: ТФ РГТЭУ, 2008. – с. 162-176.
21. Степанов В. Г., Степанова Т. В. Системы управления товарными запасами на предприятиях торговли: основные принципы построения и показатели функционирования. // Экономика России: теория и практика: Сборник научных трудов Тульского филиала РГТЭУ. / Под ред. д.э.н., проф. В. И. Зудина. – Тула: ИПП «Гриф и К», 2004. – с. 122-129.
22. Ширяев В. И. Исследование операций и численные методы оптимизации. – М.: КомКнига, 2007. – 216 с.
23. Экономический анализ в торговле: учеб. пособие / Баканов М. И. [и др.]; под ред. М. И. Баканова. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 400 с.: ил.